Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea
13 maggio 2004

Il problema di Plateau non parametrico in codimensione arbitraria

Candidato
Luca M.A. Martinazzi
l.martinazzi@sns.it

Relatore
Prof. Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore

Controrelatore
Prof. Giovanni Alberti
Università di Pisa

Anno Accademico 2003/2004

Indice

Introduzione

L'oggetto di questa tesi è lo studio del problema di Plateau non paramentrico: data una funzione $\psi : \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, esiste un grafico $\mathcal{G}_u$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, avente come bordo $\mathcal{G}_\psi$ e la cui area $\mathcal{H}^n(\mathcal{G}_u)$ sia minima tra le sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+m}$ aventi lo stesso bordo? Il problema è legato alla teoria delle equazioni differenziali: se u è soluzione del problema, allora la variazione prima dell'area di $\mathcal{G}_u$ è nulla, e ciò equivale ad un'equazione ellittica, nota come *equazione delle superfici minime* (2.3), se $m = 1$, ed un sistema ellittico, il *sistema delle superfici minime* (1.19), se $m > 1$. Diremo che il grafico $\mathcal{G}_u$ è minimo se la sua variazione prima è nulla. Assumeremo sempre che il dominio Ω e il dato al bordo ψ siano di classe C^∞ e le funzioni u considerate saranno almeno Lipschitziane.

In codimensione 1 ($m = 1$) il problema di Plateau non parametrico è stato largamente studiato fino ai tardi anni '60. Nel 1968 H. Jenkins e J. Serrin mostrano che il problema è risolubile per ogni dato al bordo ψ se e solo se $\partial\Omega$ ha curvatura media non negativa in ogni punto. Quest'ultima ipotesi serve a fornire una **stima a priori del gradiente** sul bordo. La soluzione in codimensione 1 è unica e, se Ω è convesso, minimizza l'area perché **il funzionale area**, che associa ad una funzione u l'area del suo grafico $\mathcal{A}(u)$, **è strettamente convesso**. Inoltre una soluzione Lipschitziana dell'equazione delle superfici minime è C^∞ grazie al celebre **teorema di De Giorgi** sulla Hölderianità delle soluzioni deboli di equazioni ellittiche.

Gli strumenti usati in codimensione 1 non si applicano in codimensione maggiore: le stime a priori del gradiente non si generalizzano, il funzionale area non è più convesso e il teorema di regolarità di De Giorgi si applica solo alle equazioni scalari e, quindi, non al sistema delle superfici minime.

Nel 1977 H. Lawson e R. Osserman provano che in codimensione maggiore di 1 il problema dell'esistenza di grafici minimi con dato al bordo assegnato non è in generale risolubile nemmeno se il dominio Ω è una palla n-dimensionale. Anche l'unicità e la stabilità sono false, a causa della mancata convessità dell'area: è provata l'esistenza di un dato al bordo ψ per cui il sistema delle superfici minime ha almeno 3 soluzioni di cui una instabile. Lawson e Osserman esibiscono, infine, un grafico Lipschitziano ma non C^1 di area minima, in contrasto con la regolarità in codimensione 1.

Nel 2002 Mu-Tao Wang ha dimostrato alcuni risultati positivi in codimensione arbitraria. Egli mostra che il flusso per curvatura media (il meno flusso gradiente del funzionale area) del grafico iniziale $\mathcal{G}_\psi$ (adesso ψ è pensato esteso a tutto Ω) esiste e converge ad un grafico minimo se la norma C^2 di ψ è sufficientemente piccola. Il risultato è basato su una stima a priori del gradiente sul bordo tipica dei problemi di evoluzione e fa uso del principio di massimo parabolico.

Mu-Tao Wang descrive anche una regione della Grassmanniana degli n-piani $G(n,m)$ su cui il logaritmo del reciproco del funzionale area è convesso; tale regione contiene i piani tangenti dei grafici **area-decreasing**. Applicando questo risultato ed un teorema di regolarità di Allard per varifold minimi, si ottiene un teorema di tipo Bernstein: il grafico minimo di una funzione area-decreasing definita su tutto $\mathbb{R}^n$ è un piano n-dimensionale. Questo teorema e il teorema di Allard implicano che un grafico minimo area-decreasing è C^∞.

L'esposizione degli argomenti mette in luce le differenze a livello geometrico e di equazioni differenziali tra il problema di Plateau in codimensione 1 e maggiore di 1. Il materiale dei capitoli 1, 2 e 3 è coperto esaurientemente dalla letteratura degli ultimi decenni. Le dimostrazioni dei capitoli 4 e 5, invece, sono in parte inedite: gli articoli originali fanno uso di risultati non presenti in letteratura. Ad esempio, il teorema 4.22 e i teoremi sui coni minimi del capitolo 5, su cui si basano il risultato di esistenza, il teorema di Bernstein e la regolarità in codimensione maggiore di 1, sono originali.

Le idee presentate nella tesi si mostrano inclini ad ulteriori utilizzi: la convessità dell'area tra le mappe area-decreasing può essere utile nel provare un teorema di unicità e stabilità o in un approccio variazionale. Ho avuto la possibilità di discutere personalmente questi sviluppi con il prof. Mu-Tao Wang presso la Columbia University, economicamente supportato dalla Scuola Normale Superiore e dai fondi di ricerca del prof. Wang; ad entrambi va il mio ringraziamento. In varie occasioni ho discusso i problemi collegati alla tesi, oltre che con il mio relatore, con i prof. Luigi Ambrosio e Giovanni Alberti, che ringrazio per l'interessamento mostrato e i suggerimenti.

Desidero, infine, ringraziare sentitamente il mio relatore, prof. Mariano Giaquinta, e la Scuola Normale Superiore. Il primo per la grande disponibilità e cordialità mostrati durante questo lavoro, iniziato nel settembre 2002, quando gli chiesi un tema per il mio colloquio del terz'anno presso la Scuola Normale. Quest'ultima per avermi fornito un ambiente di studio sereno, stimolante e produttivo che, affiancato all'Università di Pisa, è un terreno ideale per un giovane che voglia entrare nel mondo della ricerca in matematica.

Capitolo 1

Geometria delle sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+m}$

1.1 Struttura Riemanniana e connessioni di Levi-Civita

Data una varietà Riemanniana (M, g), una connessione di Levi-Civita su M è un'applicazione

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

($\mathcal{T}(M)$ è lo spazio dei campi vettoriali tangenti su M) tale che

1. $\nabla_X Y$ è C^∞-lineare in X:
$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad \forall f, g \in C^\infty(M);$$
2. $\nabla_X Y$ è $\mathbb{R}$-lineare in Y:
$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad \forall a, b, \in \mathbb{R};$$
3. soddisfa la regola di Leibniz per il prodotto:
$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X (Y) + D_X fY, \quad \forall f \in C^\infty(M),$$
in cui $D_X f = X(f)$ se si intende X come derivazione;
4. non ha torsione: se $[X, Y] := XY - YX$, allora
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y];$$
5. è compatibile con la metrica:
$$D_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Teorema 1.1 *Ogni varietà Riemanniana ammette una e una sola connessione di Levi-Civita.*

Una dimostrazione si trova in [26], teorema 5.4.

In ciò che segue considereremo $\mathbb{R}^{n+m}$ dotata della ovvia struttura di varietà Riemanniana, in cui il prodotto scalare tra due vettori $u, v \in \mathbb{R}^{n+m}$ è indicato con $u \cdot v$ o $\langle u, v \rangle$. Ovviamente identifichiamo $\mathbb{R}^{n+m}$ con il suo tangente in qualunque suo punto. $\mathbb{R}^{n+m}$ possiede un'unica connessione di Levi-Civita: si tratta della connession piatta e la indichiamo con ∇. Sia $\{e_1, \dots, e_{n+m}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^{m+n}$, definita globalmente e fissata una volta per tutte; allora

$$\Gamma_{ij}^k := (\nabla_{e_i} e_j)^k = 0, \quad \forall\, i, j, k.$$

Una sottovarietà n-dimensionale $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$ di classe C^r, $r \geq 2$, verrà sempre considerate dotata della struttura Riemanniana indotta dallo spazio ambiente: è l'unica struttura Riemanniana a rendere l'immersione

$$\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

un'isometria. Dunque la metrica g su Σ è semplicemente la restrizione della metrica di $\mathbb{R}^{n+m}$.

Indicheremo con $T\Sigma$ il suo fibrato tangente, di classe C^{r-1}, e, per ogni $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ sarà lo spazio tangente a Σ in p. Analogamente $N\Sigma$ e $N_p\Sigma$ indicheranno il fibrato normale e lo spazio ortogonale al tangente in p. Una generica base ortonormale di $T_p\Sigma$ sarà denotata $\{\tau_1, \dots \tau_n\}$ e una base di $N_p\Sigma$ sarà $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$.

La connessione di Levi-Civita di Σ può essere espressa in termini della connessione ∇ di $\mathbb{R}^{n+m}$: $\nabla^\Sigma = \nabla^T$. Più precisamente, siano $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$ campi tangenti su Σ; date $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, estensioni arbitrarie ad un intorno di Σ in $\mathbb{R}^{n+m}$ dei campi X e Y, si ha

$$\nabla_X^\Sigma Y = (\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})^T, \tag{1.1}$$

dove $(\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})^T$ è la proiezione ortogonale di $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ sul fibrato tangente $T\Sigma$. Si può verificare che ∇^Σ non dipende dalla scelta delle estensioni $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$. Questo è semplicemente conseguenza del fatto che $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}(p)$ dipende solo da $X(p)$ e dal valore di Y sull'immagine di una qualunque curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n+m}$ con $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$. D'ora in poi, quando necessario, i campi vettoriali su Σ saranno pensati estesi, almeno localmente.

Per dimostrare (1.1), si utilizza il teorema 1.1, ovvero, grazie all'unicità della connessione di Levi-Civita, è sufficiente provare che $(X, Y) \to$

$(\nabla_X Y)^T$ è una connessione di Levi-Civita. La C^∞-linearità in X e la $\mathbb{R}$-linearità in Y sono ovvie, così come la regola di Leibniz. Vediamo che non c'è torsione (proprietà 4 nella definizione):

$$(\nabla_X Y)^T - (\nabla_Y X)^T = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^T = [X,Y]^T = [X,Y].$$

Verifichiamo infine la compatibilità con le metrica:

$$D_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Y Z) = g((\nabla_X Y)^T, Z) + g(X, (\nabla_Y Z)^T).$$

Gli operatori gradiente, divergenza e Laplaciano Data una funzione C^1 $f : \Sigma \to \mathbb{R}$, dato $X \in T_p\Sigma$, definiamo

$$D_X f(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)),$$

per una qualunque curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X$.

Il *gradiente* su Σ di f in p è definito da

$$\nabla^\Sigma f(p) = \sum_{j=1}^{n} (D_{\tau_j} f(p))\tau_j.$$

Non è difficile provare che se f è definita in un intorno di p in $\mathbb{R}^{n+m}$, allora si ha

$$\nabla^\Sigma f(p) = (\nabla f(p))^T,$$

dove $\nabla f(p) = \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) e_j$.

In coordinate locali, ovvero data una carta (V, φ), con $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, e data la corrispondente parametrizzazione locale $F = \varphi^{-1}$ vale

$$\nabla^\Sigma f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j}, \tag{1.2}$$

dove $\frac{\partial}{\partial x^i} f(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$, $g_{ij} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}$ e g^{ij} è la matrice inversa di g_{ij}.

La *divergenza* di una campo vettoriale (non necessariamente tangente) $\sum_{j=1}^{n+m} X^j e_j$ su Σ è definita da

$$\operatorname{div}^\Sigma X = \sum_{j=1}^{n+m} e_j \cdot (\nabla^\Sigma X^j) = \sum_{i=1}^{n} (D_{\tau_i} X) \cdot \tau_i.$$

In coordinate locali, con le stesse notazioni di (1.2) e intendendo che $g = \det g_{ij}$

$$\operatorname{div}^\Sigma X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} X^i). \tag{1.3}$$

Infine il *Laplaciano* su Σ di una funzione in $C^2(\Sigma)$ è definito come

$$\Delta_\Sigma f = \mathrm{div}^\Sigma \nabla^\Sigma f,$$

che si riscrive in coordinate locali inserendo (1.2) in (1.3):

$$\Delta_\Sigma f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big). \tag{1.4}$$

1.2 La seconda forma fondamentale e la curvatura media

Definizione 1.2 (Seconda forma fondamentale) *Definiamo la seconda forma fondamentale h come la parte normale della connessione di $\mathbb{R}^{n+m}$: dati $X, Y \in \mathcal{T}(M)$*

$$h(X,Y) = (\nabla_X Y)^N.$$

Come prima, X e Y si pensano estesi.

Proposizione 1.3 *La seconda forma fondamentale h:*

1. *è simmetrica: $h(X,Y) = h(Y,X)$;*
2. *è C^∞-lineare in entrambe le variabili;*
3. *$h(X,Y)(p)$ dipende solo da $X(p)$ e da $Y(p)$.*

In particolare h è ben definita come famiglia di applicazioni bilineari

$$h_p : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to N_p\Sigma.$$

Dimostrazione Per la simmetria di ∇ e poiché per $X, Y \in \mathcal{T}(\Sigma)$ si ha $[X,Y] \in \mathcal{T}(\Sigma)$, vale

$$h(X,Y) - h(Y,X) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)^N = [X,Y]^N = 0.$$

Per provare la 2, si osserva che h è differenza di due connessioni:

$$h(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_X^\Sigma Y$$

ed è quindi C^∞-lineare in X. Essendo h simmetrica è anche C^∞-lineare in Y.

Infine, sia $\nabla_X Y(p)$ che $\nabla_X^\Sigma Y(p)$ dipendono solo da Y e $X(p)$. Ma per simmetria, è sufficiente conoscere $Y(p)$ e X e quindi è anche sufficiente conoscere solo $X(p)$ e $Y(p)$. $\square$

Definizione 1.4 (Curvatura media) *Per ogni $p \in \Sigma$, definiamo curvatura media H di Σ in p la traccia della seconda forma fondamentale, ovvero*

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} h_p(\tau_i, \tau_i).$$

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base qualsiasi di $T_p\Sigma$ e $g_{ij} := g(v_i, v_j)$, allora

$$H(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} h_p(v_i, v_j). \tag{1.5}$$

Utilizziamo (1.5) per calcolare esplicitamente la curvature media di Σ: sia data $F : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione locale in p, ovvero un diffeomorfismo di Ω con un intorno di p. Supponiamo $F(0) = p$. F induce una base di $T_p\Sigma$, data da $\left\{\frac{\partial F}{\partial x^i}\right\}_{i=1,\dots,n}$.

$$\nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} \frac{\partial F}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Utilizzando (1.5) si ottiene

$$H(p) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(F^{-1}(p)) \Big)^N, \tag{1.6}$$

$g_{ij} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}$.

Lemma 1.5 (Derivata di un determinante) *Sia $g(s) = \det(g_{ij}(s))$, in cui g_{ij} si intende derivabile in s. Allora*

$$\frac{\partial g}{\partial s} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial s} \tag{1.7}$$

Proposizione 1.6 *Sia $F : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione locale in p. Allora $\Delta_\Sigma F(p) \in N_p\Sigma$ e*

$$H(p) = \Delta_\Sigma F(p). \tag{1.8}$$

Il Laplaciano di F è calcolato componente per componente.

Dimostrazione Proviamo che $\Delta_\Sigma F(p)$ è ortogonale a $T_p\Sigma$. D'ora in poi non specifichiamo il punto p. Grazie a (1.4) si scrive

$$\Delta_\Sigma F \cdot \frac{\partial F}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^k} \big) - g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k}.$$

Si osserva che

$$g^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Si sostituisce la formula per la derivata di un determinante (1.7) e si ottiene

$$\Delta_\Sigma F \cdot \frac{\partial F}{\partial x^k} = 0.$$

Poiché k è arbitrario si conclude che $\Delta_\Sigma F$ è ortogonale a Σ.

Proviamo la (1.8): scrivendo il Laplaciano in coordinate locali e derivando si ottiene

$$\Delta_\Sigma F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial F}{\partial x^j}\Big) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\Big)\partial_j F + g^{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Osservando che la prima parte è tangente e usando (1.6)

$$\Delta_\Sigma F = (\Delta_\Sigma F)^N = \Big(g^{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}\Big)^N = H.$$

□

1.3 La formula dell'area: variazione prima

Chiameremo area di Σ la misura di Hausdorff n-dimensionale di Σ, i.e. $\mathcal{A}(\Sigma) := \mathcal{H}^n(\Sigma)$. Essa può essere calcolata attraverso la formula dell'area.

Teorema 1.7 (Formula dell'area) *Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ un'applicazione* localmente Lipschitziana *e* iniettiva *da un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+m}$. Sia Σ l'immagine di F; allora*

$$\mathcal{H}^n(\Sigma) = \int_\Omega \sqrt{\det dF^*(x) dF(x)}dx, \tag{1.9}$$

dove $dF^* : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ è la trasposta di dF.

Dimostrazioni di questo teorema si trovano in [9] e [11].

Se $g_{ij} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}$, si osserva che $(dF^* dF)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n+m} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j} = g_{ij}$ e quindi, essendo $g = \det g_{ij}$,

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Omega \sqrt{g(x)}dx. \tag{1.10}$$

In particolare $\sqrt{g}dx$ è l'elemento d'area di Σ espresso nella parametrizzazione F per cui, data una funzione $\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$-integrabile f, si ha

$$\int_\Sigma f d\mathcal{H}^n = \int_\Omega f \circ F \sqrt{g}dx.$$

Variazione prima dell'area

Definizione 1.8 *Data $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$ di classe almeno C^1, una variazione di Σ è una famiglia di diffeomorfismi $\varphi_t : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ tali che*

1. *$\varphi(t,x) := \varphi_t(x)$ è C^2 in $(-1,1) \times \mathbb{R}^{n+m}$;*
2. *esiste un compatto K che non incontra il bordo di Σ (eventualmente vuoto) tale che $\varphi_t(x) = x$ per ogni $x \notin K$ e $t \in (-1,1)$;*
3. *$\varphi_0(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^{n+m}$.*

Proposizione 1.9 *Siano $\Sigma_t = \varphi_t(\Sigma)$ e $X = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\big|_{t=0}$. Supponiamo che Σ sia di classe almeno C^1 e possegga una parametrizzazione globale $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$. Allora*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma \Delta_\Sigma F \cdot X d\mathcal{H}^n, \tag{1.11}$$

dove il Laplaciano è inteso in senso debole, ovvero

$$\begin{aligned} -\int_\Sigma \Delta_\Sigma F \cdot X &= -\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j}\Big) X^\alpha \sqrt{g} dx = \\ &= \int_\Omega \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} dx = \int_\Sigma g^{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} d\mathcal{H}^n. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Qui e nel seguito, l'integrazione per parti, anche solo formale, è giustificata dal fatto che $\varphi_t = Id$ fuori da un compatto che non interseca il bordo di Σ. In particolare $\operatorname{spt} X$ non interseca il bordo di Σ.

Dimostrazione Poichè φ è differenziabile e $\varphi_0(y) = y$, vale

$$\varphi_t(y) = y + tX(y) + o(t), \quad X(y) := \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}. \tag{1.13}$$

Si deriva sotto il segno di integrale la formula dell'area (1.10) e si usa la formula della derivata di un determinante (1.7): siano $F_t(x) = \varphi_t(F(x))$ e $g^t_{ij} = \frac{\partial F_t}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F_t}{\partial x^i}$. Tutte le derivare in t si intendono calcolate in $t = 0$ e chiaramente $g = g^0$.

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \sqrt{g^t} dx = \int_\Omega \frac{\partial \sqrt{g^t}}{\partial t} dx = \int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{g}}\Big(g g^{ij}\frac{\partial g^t_{ij}}{\partial t}\Big) dx. \tag{1.14}$$

Per calcolare $\frac{\partial g^t_{ij}}{\partial t}$ osserviamo che, grazie a (1.13), $\frac{\partial \varphi^t(F(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i} + t\frac{\partial X}{\partial x^i} + o(t)$ e sostituendo in (1.14) si ha

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{g}}\Big(g g^{ij}\frac{\partial g^t_{ij}}{\partial t}\Big) dx = \\ &\quad = \int_\Omega \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\big(\frac{\partial F}{\partial x^i} + t\frac{\partial X}{\partial x^i} + o(t)\big)\cdot\big(\frac{\partial F}{\partial x^j} + t\frac{\partial X}{\partial x^j} + o(t)\big)\Big) dx = \\ &\qquad \int_\Omega \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{ij}\Big(\frac{\partial X(F(x))}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^j} + \frac{\partial F}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial (X(F(x)))}{\partial x^j}\Big) dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

L'ultimo termine, grazie alla simmetria di g^{ij} diventa

$$\int_\Omega \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial X(F(x))}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j} dx = - \int_\Sigma \Delta_\Sigma F \cdot X. \tag{1.16}$$

$\square$

Proposizione 1.10 *Siano Σ, φ_t e X come nella proposizione 1.9. Allora*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = \int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X.$$

Osservazione A differenza della proposizione 1.9, questa proposizione non richiede l'esistenza di una parametrizzazione globale, per cui può essere ritenuta maggiormente intrinseca. •

Dimostrazione Sia data una base qualunque di $T_p\Sigma$, diciamo $\{v_1, \dots, v_n\}$, e $g_{ij} = v_i \cdot v_j$. Allora, per linearità

$$\operatorname{div}^\Sigma X = g^{ij} \nabla_{v_i} X \cdot v_j.$$

Di conseguenza, scegliendo una parametrizzazione locale F in p e $v_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$, e usando che $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial x^i}} X = \frac{\partial X(F)}{\partial x^i}$ si ottiene

$$\operatorname{div}^\Sigma X = g^{ij} \frac{\partial X(F(x))}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}.$$

Si conclude per confronto con (1.15). $\square$

Osservazione Le proposizioni 1.9 e 1.10 caratterizzano la variazione prima dell'area di una sottovarietà nella sola ipotesi che la varietà sia C^1. In realtà è sufficiente meno: entrambe le proposizioni possono essere ripetute parola per parola per sottovarietà Lipschitziane, utilizzando il teorema di Rademacher. •

Proposizione 1.11 *Sia Σ una sottovarietà C^2 e sia data una variazione prima φ_t con campo variazione X. Allora la variazione prima dell'area è*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = -\int_\Sigma H \cdot X. \tag{1.17}$$

Dimostrazione È sufficiente inserire (1.8), valida per sottovarietà C^2, nella proposizione 1.9. $\square$

1.4 Superfici minime

Per noi una superficie minima è una sottovarietà Σ la cui area sia stazionaria rispetto a variazioni a supporto compatto:

Definizione 1.12 (Superfici minime) *Sia Σ una n-sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitziana. Diremo che Σ è minima se per ogni variazione φ_t, definizione 1.8, si ha*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(\Sigma_t) = 0.$$

In virtù delle proposizioni 1.9, 1.10 e 1.11, abbiamo a disposizione la seguente proposizione che caratterizza le superfici minime.

Proposizione 1.13 *Data Σ sottovarietà Lipschitziana di $\mathbb{R}^{n+m}$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *Σ è minima;*

2. *per ogni campo vettoriale $X \in C_0^1(\mathbb{R}^{n+m};\mathbb{R}^{n+m})$ tale che $X = 0$ in un intorno del bordo di Ω*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X = 0;$$

3. *per ogni parametrizzazione locale $F : \Omega \to \Sigma$ si ha $\Delta_\Sigma F = 0$ in senso debole.*

Inoltre, se $\Sigma \in C^2$, le precedenti affermazioni sono equivalenti a $H = 0$.

Dimostrazione Abbiamo provato che $2 \Rightarrow 1$ e $3 \Rightarrow 2$. È anche vero che $2 \Rightarrow 3$ perché

$$0 = \int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X = -\int_\Sigma \Delta_\Sigma F \cdot X.$$

per l'arbitrarietà di X si conclude che $\Delta_\Sigma F = 0$.

Per provare che $1 \Rightarrow 2$, è sufficiente dimostrare che per ogni campo $X \in C_0^1(\mathbb{R}^{n+m};\mathbb{R}^{n+m})$ nullo in un intorno di $\partial\Sigma$ è possibile trovare una variazione φ_t che soddisfi $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\big|_{t=0} = X$. Ciò si può fare facilmente localmente: si definisce una famiglia di variazioni $\varphi_t^{(i)}$ che si riattaccano per mezzo di partizioni dell'unità.

L'ultima affermazione è un'immediata conseguenza della proposizione 1.11. $\square$

Il sistema delle superfici minime Sia data una parametrizzazione $F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ di una sottovarietà Lipschitziana $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Grazie alla proposizione 1.13, Σ è minima se e solo se F soddisfa il seguente sistema, detto *sistema delle superfici minime*:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j}\Big) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n+m, \tag{1.18}$$

dove $g = \det g_{ij}$, $g_{ij} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}$ e $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

La definizione è ben posta e va letta in senso debole, ovvero, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0.$$

Superfici minime non parametriche Una superficie non parametrica Σ è il grafico $\mathcal{G}_u$ di una funzione Lipschitziana $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$. $\mathcal{G}_u$ è chiaramente parametrizzata dall'immersione

$$F := I \times u : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m},$$

ovvero $F(x) = (x, u(x))$. Il sistema delle superfici minime, in questo caso, diventa

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\Big) = 0 & j = 1, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\Big) = 0 & \alpha = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{1.19}$$

Anche le equazioni di questo sistema vanno lette in senso debole. Si tratta di un sistema ellittico in forma di divergenza.

In realtà, almeno nel caso di grafici di funzioni C^2, il sistema (1.19) può essere ridotto ad un sistema quasilineare ellittico non in forma di divergenza, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 1.14 *Sia $u \in C^2(\Omega)$. Allora il sistema* (1.19) *equivale a*

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \tag{1.20}$$

Dimostrazione Valga (1.20) e sia $F(x) = (x, u(x))$.

$$\Delta_\Sigma F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij})\frac{\partial F}{\partial x^j} + g^{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i x^j}.$$

L'ultimo termine è nullo perché $g^{ij}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i x^j} = 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$ e $g^{ij}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i x^j} = 0$ per ipotesi. Poiché $\Delta_\Sigma F \in N\Sigma$ e il termine $\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij})\frac{\partial F}{\partial x^j}$ è tangente, si conclude che anch'esso dev'essere nullo e dunque $\Delta_\Sigma F = 0$.

Viceversa, se vale (1.19) e u è C^2, allora, grazie alla proposizione 1.13, $H = 0$. Si conclude utilizzando (1.6). □

1.5 Valori singolari: le mappe area-decreasing

Dalla formula dell'area (1.9), sappiamo che l'area del grafico di una funzione Lipschitziana $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}_u) = \int_\Omega \sqrt{\det(DF^*DF)}dx = \int_\Omega \sqrt{\det\big(I + Du^*Du\big)}dx; \tag{1.21}$$

esistono sempre sistemi di coordinate in cui Du e l'elemento d'area abbia una forma particolarmente semplice.

Proposizione 1.15 (Decomposizione in valori singolari) *Sia data A, matrice $m \times n$. Allora esistono U e V matrici ortogonali su $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ rispettivamente, tali che $B = UAV$ è una matrice diagonale: se $B = \{\lambda_{\alpha i}\}_{\alpha=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$, allora $\lambda_{\alpha i} = 0$ quando $\alpha \neq i$.*

Dimostrazione Una dimostrazione si trova in [27], teorema 7.7.1. □

Osservazione Possiamo supporre $\lambda_{\alpha i} \geq 0$: infatti cambiare segno ai vettori di una base, è una trasformazione ortogonale. È chiaro che $\max \lambda_i = |Du|$. •

Applicando la decomposizione in valori singolari al differenziale Du, si ottiene $Du^*Du = \mathrm{diag}\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\}$, dove $\lambda_i := \lambda_{ii}$ se $i \leq m$ e $\lambda_i = 0$ altrimenti. Dunque

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}_u) = \int_\Omega \sqrt{\textstyle\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i^2(x))}dx. \tag{1.22}$$

Definizione 1.16 *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione Lipschitziana. Siano $\{\lambda_i(x)\}_{i=1,\ldots,n}$ i valori singolari di $Du(x)$. Diremo che u è area-decreasing se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si abbia*

$$\lambda_i(x)\lambda_j(x) \leq 1 - \varepsilon, \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{1.23}$$

Il significato geometrico della condizione *area-decreasing* è il seguente: consideriamo $Du(x)$ ristretto ad un sottospazio 2 dimensionale V di $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $A \subset V$ con $\mathcal{H}^2(A) < \infty$ si ha $\mathcal{H}^2(Du(x)(A)) < \mathcal{H}^2(A)$. Equivalentemente lo Jacobiano di $Du(x)\big|_V$ è minore di 1.

Osservazione Se $m = 1$, ovvero $u : \Omega \to \mathbb{R}$, allora u è area-decreasing. Questo deriva direttamente dalla definizione perché i valori singolari di $Du(x)$

non nulli sono una base dell'immagine di $Du(x)$ e quindi in (1.23) λ_i e λ_j non possono essere entrambi nulli. In effetti è naturale che le funzioni scalari siano area-decreasing, visto che $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) = 0$. •

Come vedremo, all'interno della categoria area-decreasing è possibile provare teoremi di esistenza, regolarità e rigidità per i grafici minimi in codimensione arbitraria che si presentano come estensioni naturali dei corrispondenti teoremi in codimensione 1.

1.6 Enunciato del problema di Plateau non parametrico

Il problema di Plateau non parametrico, o cartesiano richiede di trovare grafici di area minima con bordo assegnato. Il bordo Γ è dato nella forma di grafico di una funzione C^∞ assegnata

$$\psi : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m, \quad \Gamma = \mathcal{G}_\psi$$

dove Ω è un dominio di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n$.[1] Consideriamo l'insieme di n-sottovarietà Lipschitziane

$$A = \big\{\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m} \ : \ \partial\Sigma = \Gamma\big\}.$$

Tale insieme è non vuoto perché l'omologia di $\mathbb{R}^{n+m}$ è banale.

Affronteremo i seguenti problemi:

Problema 1: Esistenza di minimi
È possibile trovare un'applicazione $u \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ tale che $\mathcal{G}_u \in A$ e

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}_u) \le \mathcal{A}(\Sigma), \quad \forall \Sigma \in A?$$

Possiamo indebolire il problema.

Problema 2: Esistenza di punti critici
Esiste $u \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ tale che $\mathcal{G}_u \in A$ il cui grafico abbia variazione prima nulla?

Problema 3: Stabilità
Una soluzione del problema 2 risolve anche il problema 1? È perlomeno stabile, nel senso che piccole variazioni non aumentano l'area?

Problema 4: Unicità
Una soluzione del problema 1 o del problema 2 è unica?

Problema 5: Regolarità
Una soluzione del problema 1 o del problema 2 è regolare?

[1] cioé, ogni punto $x \in \partial\Omega$ ha un intorno diffeomorfo ad un semispazio di dimensione n.

Non discuteremo, invece, i problemi analoghi quando si cerchino grafici stazionari o minimizzanti nella classe

$$B = \{\mathcal{G}_v \ : \ v \in \mathrm{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^m), \ \partial \mathcal{G}_u = \Gamma\}.$$

Vedremo, tuttavia, che in codimensione 1 le due classi di problemi sono spesso analoghe.

Il problema di Dirichlet

Per ogni funzione $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, chiameremo problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime, il seguente sistema:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g} g^{ij}\Big) = 0 & j = 1, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\Big) = 0 & \alpha = 1, \dots, m. \\ u^\alpha\big|_{\partial\Omega} = \psi^\alpha\big|_{\partial\Omega} & \alpha = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{1.24}$$

Il problema di Dirichlet è equivalente al problema 2 grazie alla proposizione 1.13 e le soluzioni del problema 1 risolvono anche il problema di Dirichlet perché la variazione prima di una superficie che minimizza l'area in A è nulla.

Il problema della regolarità è intimamente legato alla natura del sistema delle superfici minime e, in codimensione 1, dell'equazione delle superfici minime (2.3).

Osserviamo infine che se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, grazie alla proposizione 1.14, il sistema (1.24) è equivalente a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \alpha = 1, \dots, m \\ u^\alpha\big|_{\partial\Omega} = \psi^\alpha\big|_{\partial\Omega} & \alpha = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{1.25}$$

Capitolo 2

Codimensione 1

2.1 Convessità dell'area

Sia Ω un dominio connesso C^∞ in $\mathbb{R}^n$. In codimensione 1 il funzionale area definito sullo spazio $\mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ può essere facilmente riscritto come

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}dx. \tag{2.1}$$

Proposizione 2.1 (Convessità) *Il funzionale area*

$$\mathcal{A} : \mathrm{Lip}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$$

in codimensione 1 è strettamente convesso nel senso che

$$\mathcal{A}(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\mathcal{A}(u) + (1-\lambda)\mathcal{A}(v),$$

per ogni $u, v \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ *e* $\lambda \in (0,1)$ *e l'uguaglianza vale se e solo se* $u = v + c$ *per qualche* $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Osserviamo che $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ è una funzione strettamente convessa, essendo la sua derivata seconda

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Allora il funzionale area è composizione di un'applicazione lineare ($u \to Du$), una funzione convessa ($p \to |p|$), un'altra funzione convessa ($x \to \sqrt{1+x^2}$) e un funzionale lineare (l'integrale su Ω). Poiché composizione di funzioni convesse è convessa, si ha la convessità. Per verificare che essa è stretta siano u, v tali che $u \neq v + c$. Allora

$$\int_\Omega \sqrt{1+|D(\lambda u + (1-\lambda)v|^2}dx \leq \int_\Omega \sqrt{1+(\lambda|Du| + (1-\lambda)|Dv|)^2} < \\ < \lambda\mathcal{A}(u) + (1-\lambda)\mathcal{A}(v). \tag{2.2}$$

L'ultima disuguaglianza è stretta perché $Du \neq Dv$. □

Osservazione La convessità è una delle caraterristiche più importanti del funzionale area in codimensione 1 e segna anche un netto punto di distacco dal funzionale area in codimensione più alta. Infatti, come vedremo, l'esistenza e l'unicità di grafici di area minima in codimensione 1 è strettamente legata alla convessità. Tali risultati sono falsi in codimensione maggiore come mostrano gli esempi di Lawson e Osserman che vedremo. •

2.2 Unicità e stabilità

Teorema 2.2 *In codimensione 1 il grafico di una soluzione Lipschtziana $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ del sistema delle superfici minime* (1.19) *minimizza l'area tra i grafici delle funzioni Lipschitziane v tali che $u = v$ su $\partial\Omega$. Inoltre u soddisfa* l'equazione delle superfici minime *in forma di divergenza:*

$$D_i \frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} = 0. \tag{2.3}$$

Infine tale soluzione è unica.

L'equazione (2.3) va letta in senso debole.

Dimostrazione 1. Il sistema delle superfici minime implica che la variazione prima del grafico $\mathcal{G}_u$ è nulla. In particolare, data una funzione $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ si ha

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(u+t\varphi) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1+|Du+tD\varphi|^2}dx = -\int_\Omega \frac{D_i u D_i \varphi}{\sqrt{1+|Du|^2}}dx, \tag{2.4}$$

che è esattamente l'equazione delle superfici minime in forma di divergenza (2.3).

2. L'equazione (2.4) dice che u è un *punto critico* per il funzionale area. Ma la convessità implica

$$\mathcal{A}(v) \geq \mathcal{A}(u) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{A}(u+tv) = \mathcal{A}(u).$$

3. L'unicità segue dal fatto che la convessità di $\mathcal{A}$ è stretta, per cui date $u \neq v$ soluzioni del sistema delle superfici minime, avremmo

$$\mathcal{A}\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u)+\mathcal{A}(v)) = \mathcal{A}(u).$$

L'uguaglianza è conseguenza del fatto che sia u che v minimizzano e questo fatto è in contraddizione con la disuguaglianza. □

Osservazione Nella classe delle funzioni Lipschitziane, l'equazione delle superfici minime in forma di divergenza (2.3) è equivalente al sistema delle superfici minime (1.19). Questo equivale a dire che per verificare che la variazione prima dell'area è nulla, è sufficiente considerare variazioni della forma $u + t\varphi$, che chiameremo variazioni non parametriche. La possibilità di ricondurci sempre a variazioni non parametriche è dovuto al fatto che, avendo u gradiente limitato, una variazione parametrica φ_t per t abbastanza piccolo mantiene la proprietà di grafico. •

2.2.1 Stabilità per variazioni parametriche

Abbiamo visto che data una soluzione dell'equazione delle superfici minime in Ω, il suo grafico minimizza l'area tra tutti i grafici su Ω con lo stesso bordo (teorema 2.2). In realtà vale di più, come mostra il teorema seguente.

Teorema 2.3 *Sia $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una soluzione Lipschitziana dell'equazione delle superfici minime* (2.3) *in Ω. Allora:*

1. *se Ω è omotopicamente banale (ad esempio, Ω convesso, stellato o contrattile), il grafico di u minimizza l'area tra tutte le superfici Lipschitziane $\Sigma \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ aventi lo stesso bordo;*

2. *se Ω è convesso, il grafico di u minimizza l'area tra tutte le superfici Lipschitziane $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aventi lo stesso bordo.*

La dimostrazione si basa sull'esistenza di una calibrazione, ovvero di una n-forma esatta ω di modulo unitario, la cui restrizione a $\mathcal{G}_u$ sia la forma volume.

Proposizione 2.4 (Calibrazione) *Sia ω una n-forma esatta in $\Omega \times \mathbb{R}$, tale che $|\omega| \leq 1$, ovvero*

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n+1} \omega^2_{i_1 \cdots i_n} \leq 1.$$

Sia data una sottovarietà Lipschitziana $\Sigma_0 \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ con bordo regolare tale che $\omega\big|_{\Sigma_0}$ sia la forma volume di Σ_0. Allora l'area di Σ_0 è minima tra tutte le sottovarietà Lipschitziane $\Sigma \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ tali che $\partial\Sigma = \partial\Sigma_0$.

Dimostrazione Essendo ω esatta, possiamo trovare una $(n-1)$-forma η tale che $d\eta = \omega$. Sia Σ come nell'enunciato della proposizione; allora per il teorema di Stokes e poiché le due sottovarietà hanno il medesimo bordo,

$$\int_{\Sigma - \Sigma_0} \omega = \int_{\partial\Sigma - \partial\Sigma_0} \eta = 0.$$

Tuttavia, dato che $|\omega| \leq 1$,

$$\mathcal{A}(\Sigma) \geq \int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma_0} \omega = \mathcal{A}(\Sigma_0).$$

$\square$

Dimostrazione del teorema Dimostriamo separatamente le due affermazioni.

1. Consideriamo in $\Omega \times \mathbb{R}$ la forma di calibrazione

$$\omega(x, y) := \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i+1} D_i u(x) \widehat{dx^i} dy \right) + dx^1 \cdots dx^n}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

L'equazione delle superfici minime (2.3) implica che $d\omega = 0$; essendo $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ omotopicamente banale, la sua coomologia di de Rham è nulla , da cui ω è esatta. Inoltre $|\omega| = 1$ e la restrizione di ω a $\mathcal{G}_u$ è esattamente la forma volume di $\mathcal{G}_u$, per cui ω è una calibrazione per $\mathcal{G}_u$ e la proposizione 2.4 si applica perché $\partial\mathcal{G}_u$ è regolare.

2. La seconda affermazione segue dalla prima: sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il cui bordo sia $\partial\mathcal{G}_u$, quindi contenuto in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Una proiezione di Σ su $\Omega \times \mathbb{R}$ è ben definita nel seguente modo: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $\pi_1(x)$, il punto di Ω di minima distanza da x. Tale punto esiste per la convessità di Ω. Allora

$$\pi(x, y) := (\pi_1(x), y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Questa proiezione non aumenta l'area; alla superficie Lipschitziana, eventualmente con molteplicità, si applica il punto 1 e si conclude

$$\mathcal{A}(\Sigma) \leq \mathcal{A}(\pi(\Sigma)) \leq \mathcal{A}(\mathcal{G}_u).$$

$\square$

Osservazione Le ipotesi su Ω sono necessarie: in [14] R. Hardt, C. P. Lau e Fang-Hua Lin dimostrano l'esistenza di una soluzione dell'equazione delle superfici minime il cui grafico non minimizza l'area tra le n-sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$ aventi medesimo bordo. $\bullet$

2.3 Esistenza

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto regolare, connesso e limitato. Come visto, la risoluzione del problema di Plateau cartesiano in codimensione 1 è strettamente legata alla soluzione dell'equazione delle superfici minime. Nel prossimo teorema mostriamo che, sotto opportune ipotesi su $\partial\Omega$, è possibile trovare una soluzione C^∞ dell'equazione delle superfici minime con dato al bordo assegnato. Questo, grazie alla proposizione 1.14, equivale a risolvere il seguente problema di Dirichlet.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\,\Omega \\ u = \psi & \text{su}\,\partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

con u, $\psi \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $g_{ij} = \delta_{ij} + D_i u D_j u$ e $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$. Esplicitamente

$$g^{ij}(Du) = \delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2}.$$

Osservazione L'equazione (2.5) è quasilineare ed ellittica. Essa non è, tuttavia, uniformemente ellittica, ovvero non è possibile trovare $\lambda > 0$ tale che

$$g^{ij}(p)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi, p \in \mathbb{R}^n.$$

In generale, siamo in grado di provare che la costante di ellitticità λ dipende da $|p|$, lemma 4.10, in maniera sufficientemente buona. In particolare sappiamo che, per $|p| \to +\infty$, $\lambda \to 0$ abbastanza lentamente, vedi (4.13). •

Per provare il teorema di esistenza, teorema 2.17, utilizziamo un metodo basato sul teorema di punto fisso di Caccioppoli-Schauder.

Teorema 2.5 *Sia $T : K \to K$ un operatore completamente continuo*[1] *che manda un convesso chiuso limitato K di uno spazio di Banach B in sé. Allora T ha un punto fisso, nel senso che esiste $\overline{x} \in K$ tale che $T(\overline{x}) = \overline{x}$.*

Proposizione 2.6 *Sia dato uno spazio di Banach B, un operatore completamente continuo $T : B \to B$ e $M > 0$ tale che per ogni coppia $(\sigma, u) \in [0,1] \times B$ che soddisfa $u = \sigma T u$ valga $\|u\| < M$. Allora T ha un punto fisso.*

Dimostrazione Sia $K = \{u \in B \mid \|u\| \leq M\}$ e definiamo l'operatore

$$\overline{T}(u) := \begin{cases} T(u) & \text{se}\, T(u) \in K \\ M\dfrac{T(u)}{\|T(u)\|} & \text{se}\, T(u) \in B \backslash K \end{cases}$$

$\overline{T}$ manda chiaramente K in sè, per cui il teorema di punto fisso di Caccioppoli-Schauder, teorema 2.5, implica che $\overline{T}$ ha un punto fisso $u \in K$. Se fosse $\|T(u)\| \geq M$, si avrebbe

$$u = \frac{M}{\|T(u)\|}T(u), \quad \frac{M}{\|T(u)\|} \in [0,1], \tag{2.6}$$

[1] continuo e tale che mandi limitati in relativamente compatti; non assumiamo che T sia lineare.

quindi $\|u\| < M$ per ipotesi, assurdo perché (2.6) implica che $\|u\| = M$. Dunque $\|u\| < M$ e $T(u) = \overline{T}(u) = u$. $\square$

Applicheremo questo teorema allo spazio di Banach delle funzioni con derivata Hölderiana $B = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$:

Definizione 2.7 (Funzioni Hölderiane) *Una funzione $u := \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ si dice Hölderiana con costante di Hölder $\alpha \in (0,1]$ se*

$$[u]_\alpha := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega},\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty.$$

Chiaramente le funzioni Hölderiane sono continue; lo spazio delle funzioni Hölderiane si indica con $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ed è uno spazio di Banach dotato della norma

$$\|u\|_{0,\alpha} := \|u\|_{C^0} + [u]_\alpha.$$

Constestualmente definiamo gli spazi $C^{r,\alpha}$ con $r \in \mathbb{N}$ come gli spazi di funzioni le cui derivate fino all'ordine r sono Hölderiane; la norma corrispondente è

$$\|u\|_{r,\alpha} := \|u\|_{C^r} + [D^r u]_\alpha$$

dove si considera $D^r u$ una funzione a valori in $\mathbb{R}^d$ per un certo d.

Cosideriamo su $B = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'operatore $\widetilde{T}$ che associa ad una funzione $u \in C^{1,\alpha}$ l'unica soluzione v del seguente problema di Dirichlet, la cui esistenza è garantita dal teorema successivo.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\,\Omega \\ v = \psi & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Tale soluzione esiste in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Infatti $Du \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, quindi, i coefficienti $g^{ij}(Du)$ sono Hölderiani e al sistema (2.7) si applica il teorema 2.8. L'operatore $\pi : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ è compatto per il corollario 2.10 al teorema di Ascoli-Arzelà. Vogliamo provare che, sotto opportune ipotesi su Ω, l'operatore

$$T := \pi \circ \widetilde{T} : C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{2.8}$$

è completamente continuo, verifica la *stima a priori* della proposizione 2.6 e ha quindi un punto fisso, soluzione di (2.5).

Teorema 2.8 *Siano dati $a^{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ ellittici e limitati, ovvero tali che per una certa scelta di $\lambda, \Lambda > 0$ valga*

$$\lambda\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda\,|\xi|^2\,, \forall x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} & \text{in } \Omega \\ u = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.10}$$

ammette un'unica soluzione in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Inoltre esiste una costanta $C = C(\Omega, \lambda, \Lambda)$ tale che

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C(\Omega, \lambda, \Lambda) \|\psi\|_{2,\alpha} . \tag{2.11}$$

2.3.1 Il teorema di Ascoli-Arzelà

Una successione di funzioni $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *equicontinua* se per ogni $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|u_j(x) - u_j(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in B_\delta(x_0), \ \forall j.$$

La stessa successione u_j si dice *equilimitata* se esiste $M > 0$ tale che

$$|u_j(x)| \leq M, \quad \forall x \in \Omega, \forall j.$$

Teorema 2.9 (Ascoli-Arzelà) *Ogni successione di funzioni equicontinue ed equilimitate*

$$u_j : \Omega \to \mathbb{R}$$

ammette una sottosuccessione convergente uniformemente sui compatti.

Corollario 2.10 *L'immersione $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^r(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, è compatta.*

Dimostrazione Sia u_j limitata in $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$, ovvero $\|u_j\|_{r,\alpha} \leq M$ per un certo $M > 0$. Allora le derivate di ordine massimo sono equicontinue grazie alla stima

$$|D_j^r(x) - D_j^r(y)| \leq K|x-y|^\alpha, \quad \forall j \in \mathbb{N}, x, y \in \Omega.$$

Inoltre tutte le derivate di ordine basso sono equicontinue perché quelle di ordine maggiore sono equilimitate. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà a ciascuna derivata si conclude che esiste una sottosuccessione le cui derivate di ogni ordine $\leq r$ convergono uniformemente. □

2.3.2 Stime a priori

Diamo una stima a priori $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ delle soluzioni di $u = \sigma T u$, $\sigma \in [0,1]$, essendo T definito in (2.8).

Tale stima può essere ottenuta in quattro passi:

1. $\sup_{\overline{\Omega}} |u|$
2. $\sup_{\partial\Omega} |Du|$
3. $\sup_{\overline{\Omega}} |Du|$
4. $\|u\|_{1,\alpha}$

Per prima cosa, osserviamo che $u = \sigma T u$ equivale a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\,\Omega \\ u = \sigma\psi & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.12}$$

Proposizione 2.11 (Principio di massimo ellittico) *Sia* $a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ *un operatore ellittico, ovvero*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

per un certo $\lambda > 0$*; siano date funzioni reali* b_k *arbitrarie. Allora, data una soluzione* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *di*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{k=1}^{n} b^k(x)\frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \geq 0, \tag{2.13}$$

vale

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Osservazione Applicando il principio di massimo a $-u$ si ottiene che se

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x)\frac{\partial u}{\partial x^k}(x) \leq 0,$$

allora

$$\inf_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

•

Dimostrazioni del principio di massimo si trovano in ogni libro di equazioni differenziali del secondo ordine ellittiche, ad esempio [12].

Poiché per u fissato l'equazione (2.7) è lineare e uniformemente ellittico[2] , il primo passo è una semplice applicazione del principio di massimo alla soluzione u, per cui

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\psi| \,.$$

2.3.3 Stime del gradiente sul bordo

Per le stime del gradiente sul bordo utilizziamo il metodo delle barriere. Lo scopo è provare la proposizione 2.13.

Le stime del gradiente sono una delle parti che maggiormente distinguono i diversi funzionali del calcolo delle variazioni. La costruzione delle barriere, infatti, dipende intimamente dalla struttura dell'equazione, ovvero dai coefficienti g^{ij}, in particolare dal comportamento della costante di ellitticità.

Lemma 2.12 *Siano $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tali che*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\,\Omega \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv) \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0 & \text{in}\,\Omega \\ u \leq v & \text{su}\,\partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

Allora $u \leq v$ su tutto Ω.

Dimostrazione Per il teorema del valor medio di Lagrange esiste $\xi \in (0,1)$ tale che

$$g^{ij}(Du) = g^{ij}(Dv) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^{ij}}{\partial p^k}(\xi Dv + (1-\xi)Du)\Big(\frac{\partial u}{\partial x^k} - \frac{\partial v}{\partial x^k}\Big).$$

Sottraendo nel sistema precedente si ottiene per $w := v - u$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv) \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k \frac{\partial w}{\partial x^k} \leq 0 & \text{in}\,\Omega \\ w \geq 0 & \text{su}\,\partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

a cui si può applicare il principio di massimo, proposizione 2.11. Si conclude che $w \geq 0$ in Ω. □

[2]per u fissato, $a^{ij}(x) := g^{ij}(Du(x))$ è una funzione della sola variabile x; essendo $|Du(x)|$ limitato in x, il lemma 4.10 implica l'uniforme ellitticità di a^{ij}.

Abbiamo gli strumenti per la costruzione delle barriere. Sia $d : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione distanza dal bordo, regolare in un intorno del bordo (Ω è un dominio regolare). Definiamo

$$N_r := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, d(x) < r \right\}, \quad \Gamma_r := \{x \in \Omega \,|\, d(x) = r\};$$

questi domini sono regolari per r sufficientemente piccolo e, di conseguenza, considereremo sempre r piccoli. Consideriamo su N_r una funzione v del tipo

$$v(x) = \psi(x) + h(d(x)),$$

dove $h : [0, r] \to \mathbb{R}_+$ è regolare e soddisfa

$$h(0) = 0,\ h'(t) \geq 1,\ h''(t) \leq 0. \tag{2.16}$$

Con una tali scelte si ottiene

$$(1 + |Dv|^2) \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv)v_{ij} \leq h'' + Ch'^2 + h'^3 \Delta d.$$

Il comportamento di Δd è determinato dalla curvatura media di $\partial\Omega$: se $\partial\Omega$ ha curvatura media non negativa $\Delta d \leq 0$,[3] quindi,

$$(1 + |Dv|^2) \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv)v_{ij} \leq h'' + Ch'^2.$$

Ora, ponendo $h(d) = k \log(1 + \rho d)$, si possono scegliere le costanti k e ρ in modo che siano soddisfatte le (2.16), $h(r) \geq 2 \sup_{\partial\Omega} |\psi|$ e $h'' + C(h')^2 \leq 0$, da cui

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv) \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0 & \text{in } N_r \\ v \geq u & \text{su } \partial N_r \end{cases} \tag{2.17}$$

Questo, insieme al lemma 2.12, implica $u \leq v$ in N_r. Essendo $u = v$ su $\partial\Omega$ otteniamo

$$\frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} \leq \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|}, \quad x \in \Omega,\ y \in \partial\Omega. \tag{2.18}$$

Costruendo una barriera inferiore si ottiene la disuguaglianza opposta e una stima a priori del gradiente sul bordo:

Proposizione 2.13 *Sia Ω tale che $\partial\Omega$ abbia curvatura media in ogni punto non negativa. Allora esite una costante $c = c(\Omega, \psi)$ tale che, per ogni $\sigma \in$*

[3] si vedano [13] o [12]

$[0,1]$, *ogni soluzione dell'equazione delle superfici minime*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\,\Omega \\ u = \sigma\psi & \text{su}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

soddisfi

$$\sup_{\partial\Omega} |Du| \le c.$$

Dimostrazione Le barriere v^+ e v^- costruite per ψ valgono anche per $\sigma\psi$. Fissato $y \in \partial\Omega$ e un opportuno sistema di riferimento ortonormale in y, si ha

$$Du(y) = \left(D^{\partial\Omega}u(y), D_\nu u(y)\right),$$

essendo ν la normale in y a $\partial\Omega$. Poiché $u = \psi$ su $\partial\Omega$ si ha $D^{\partial\Omega}u = D^{\partial\Omega}\psi$, mentre (2.18) stima la componente normale $D_\nu u$:

$$-k\rho = D_\nu v^- \le D_\nu u \le D_\nu v^+ = k\rho,$$

quindi $|D_\nu u| \le k\rho$. □

2.3.4 Stime del gradiente all'interno

Le stime del gradiente all'interno sono conseguenza delle stime del gradiente sul bordo a causa del seguente lemma di Rado.

Lemma 2.14 *Se u è soluzione dell'equazione delle superfici minime (2.5), allora*

$$\sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\,\Big|\, x, y \in \Omega\right\} = \sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}\,\Big|\, x \in \Omega,\, y \in \partial\Omega\right\} \tag{2.20}$$

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \ne x_2$ e $\tau = x_2 - x_1$. Definiamo

$$u_\tau(x) := u(x+\tau),$$

$$\Omega_\tau := \{x \,:\, x + \tau \in \Omega\}.$$

Sia u che u_τ minimizzano in $\Omega \cap \Omega_\tau$, che è non vuoto. Dal principio di confronto, esiste $z \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ tale che

$$|u(x_1) - u(x_2)| = |u(x_1) - u_\tau(x_1)| \le |u(z) - u_\tau(z)| = |u(z) - u(z+\tau)|.$$

Osserviamo che $\partial(\Omega \cap \Omega_\tau) \subset (\partial\Omega \cup \partial\Omega_\tau)$ e, quindi, almeno uno dei punti z, $z+\tau$ appartiene a $\partial\Omega$. Inoltre, sia z che $z+\tau$ appartengono a $\overline{\Omega}$. □

In virtù di questo lemma, del principio di massimo per u e delle barriere costruite in N_r è facile vedere che c'è una stima a priori della parte destra di (2.20). La parte sinistra dà un'ovvia stima di $\sup_\Omega |Du|$, per cui abbiamo anche le stime del gradiente all'interno.

Proposizione 2.15 *Esiste una costante $C = C(\Omega, \psi)$ tale che, per ogni $\sigma \in [0,1]$, una soluzione u dell'equazione delle superfici minime con dato al bordo $\sigma\psi$ (2.19) soddisfi*

$$\sup_\Omega |Du| \leq C.$$

2.3.5 Le stime a priori $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$

Nella proposizione 2.15 e con il principio di massimo abbiamo stabilito una stima a priori $C^1(\overline{\Omega})$ delle soluzioni di (2.19), ovvero una stima di $\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |Du|$. Per applicare il teorema di punto fisso di Caccioppoli-Schauder serve una stima $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Tale stima deriva dal teorema di De Giorgi, teorema 2.21, ed è stata ottenuta nella versione globale da O. Ladyžhenskaya e N. Ural'tseva [22].

Proposizione 2.16 *Sia u una soluzione in $C^2(\overline{\Omega})$ di*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n D_i \dfrac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} & \text{in } \Omega, \\ u = \psi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\psi \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$. Allora per un qualche $\alpha > 0$ vale la seguente stima a priori:

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq C\left(\Omega, \lambda, \Lambda\right) \|\psi\|_{1,\alpha}.$$

Dimostrazione È già stata stabilita la stima a priori di $\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega |Du|$. Possiamo derivare l'equazione delle superfici minime come nella proposizione 2.22; per fare questo non è necessario il metodo dei rapporti incrementali perché stiamo ipotizzando $u \in C^2(\Omega)$. Otteniamo

$$D_i(a^{ij}(Du)D_j w) = 0, \quad w := D_s u,$$

con i coefficienti ellittici e limitati

$$a^{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\delta^{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1+|Du|^2}\right),$$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2. \tag{2.21}$$

La costanti di ellitticità e limitatezza λ e Λ sono stimate a priori perché dipendono solo da $\sup_\Omega |Du|$: utilizzando il lemma 4.10 si ottiene

$$\lambda = \frac{1}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mentre $\Lambda = 1$ va sempre bene. Applicando la stima (2.23) del teorema di De Giorgi abbiamo una stima a priori di $\|w\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ che, essendo $w = D_s u$, è la tesi. $\square$

2.3.6 Il teorema di esistenza

Teorema 2.17 *Sia Ω un dominio regolare limitato il cui bordo abbia curvatura media non negativa. Allora per ogni $\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, esiste un'unica soluzione in $C^\infty(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ al problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime (2.5).*

Dimostrazione L'unicità è conseguenza del principio di massimo ellittico del lemma 2.12.

Grazie al teorema 5.10, è sufficiente dimostrare l'esistenza di una soluzione in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

In virtù del teorema 2.6 e delle successive osservazioni e proposizioni, resta solo da mostrare che l'operatore $T = \pi \circ \widetilde{T}$ è completamente continuo. La compattezza è immediata: le stime di Schauder 2.11 implicano che $\widetilde{T}$ manda limitati di $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ in limitati di $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, i quali vengono mandati in relativamente compatti di $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ da π per il teorema di Ascoli-Arzelà, corollario 2.10. Per la continuità si consideri una successione

$$u^{(k)} \xrightarrow{C^{1,\alpha}} u$$

e la successione associata $v^{(k)} := \widetilde{T} u^{(k)}$.

Data una sottosuccessione $u^{(k')}$, per l'immersione compatta $C^{2,\alpha} \hookrightarrow C^2$, c'è una sotto-sottosuccessione $u^{(k'')}$ tale che

$$v^{(k'')} \xrightarrow{C^2} v$$

E' facile osservare che anche v è soluzione del problema (2.7)

$$\begin{array}{ccc} a^{ij}(Du^{(k'')}) & (v^{(k'')})_{ij} & = 0 \\ {\scriptstyle C^{0,\alpha}}\big\downarrow & \big\downarrow{\scriptstyle C^0} & \\ a^{ij}(Du) & v_{ij} & = 0 \end{array}$$

(la somma su i e j è sottointesa) e per unicità deve essere $v = Tu$. L'arbitrarietà nella scelta della prima sottosuccessione implica che

$$Tu^{(k)} \xrightarrow{C^{1,\alpha}} Tu$$

dimostrando, quindi, anche la continuità. □

Esistono teoremi di esistenza in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ o in $C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ anche se non è rispettata la condizione sulla curvature media di $\partial\Omega$; in questo caso, tuttavia, è necessario imporre delle restrizioni sul dato al bordo ψ. D'altra parte, la condizione sulla curvatura media di $\partial\Omega$ è precisa:

Proposizione 2.18 *Sia $x_0 \in \partial\Omega$ un punto in cui $\partial\Omega$ abbia curvatura negativa. Allora per ogni intorno U di x_0 in $\overline{\Omega}$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ con $\operatorname{spt}\psi \subset U$ e $|\psi| < \varepsilon$ per cui il problema di Dirichlet con dato al bordo ψ per l'equazione delle superfici minime non sia risolubile tra le funzioni Lipschitziane.*

La dimostrazione di questa proposizione si può trovare in [13], capitolo 12.

2.3.7 Un ulteriore teorema di esistenza

A causa della proposizione 2.18, un teorema di esistenza per domini con curvatura media negativa in alcuni punti deve assumere ipotesi sul dato ψ che non possono limitarsi ad una stima C^0, per cui ci aspettiamo di coinvolgere almeno le derivate prime. In questa direzione va un teorema di Graham Williams [45] che presentiamo senza dimostrazione.

Teorema 2.19 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ regolare e sia $0 < K < \frac{1}{\sqrt{n-1}}$. Allora esistono $\delta, C > 0$ tali che se*

$$\frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|} \le K \quad \text{e} \quad |\psi(x)-\psi(y)| < \delta \quad \forall x,y \in \overline{\Omega},\ x \neq y,$$

allora il problema di Dirichlet con dato al bordo ψ per l'equazione delle superfici minime ha soluzione in $C^\infty(\Omega)\cap C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$.

Citiamo, infine, il teorema 4.2, che dimostreremo. Esso garantisce l'esistenza in codimensione arbitraria per dati sufficientemente piccoli in norma $C^{2,\alpha}$. Ovviamente il teorema di Williams è più forte perché implica l'esistenza per dati piccoli in norma C^1, tuttavia esso non si generalizza a codimensione superiore.

2.4 Regolarità

La regolarità delle soluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime, almeno per domini a curvatura media non negativa, può esser facilmente dedotta dal teorema di esistenza in $C^{2,\alpha}$ (teorema 2.17) e dall'unicità (teorema 2.2).

Ci poniamo, più in generale, il problema della regolarità all'interno delle soluzioni deboli Lipschitziane dell'equazione delle superfici minime. Il seguente teorema risolve positivamente la questione.

Teorema 2.20 *Sia $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una soluzione debole Lipschitziana dell'equazione delle superfici minime* (2.3)*. Allora u è analitica in Ω.*

Grazie alle stime di Schauder, vedi il teorema 5.10, per provare che $u \in C^\infty(\Omega)$, è sufficiente provare che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ per qualche $\alpha > 0$ e questo deriva dal teorema di De Giorgi-Nash.

2.4.1 Il teorema di De Giorgi-Nash

Uno dei teoremi più belli e importanti della teoria delle equazioni differenziali ellittiche fu provato nel 1957 da Ennio De Giorgi [5] e, qualche mese più tardi e indipendentemente, da John Nash [33]. Questo teorema risolve il 19^{mo} problema di Hilbert:

> Sono le soluzioni di problemi regolari del calcolo delle variazioni sempre necessariamente analitiche?

Teorema 2.21 (De Giorgi-Nash) *Siano dati $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ellittici, ovvero tali che valga* (2.21) *per qualche $\lambda, \Lambda > 0$. Allora ogni funzione $u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ che sia soluzione debole di*

$$D_i(a^{ij} D_j u) = 0 \tag{2.22}$$

è Hölderiana, cioé $u \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per qualche $\alpha > 0$. Inoltre, se $u = \varphi$ su $\partial\Omega$, con $\varphi \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$, allora $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = \alpha(\Omega, \lambda, \Lambda)$, ed esiste una costante $C = C(\Omega, \lambda, \Lambda)$ tale che

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C \, \|\varphi\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \, . \tag{2.23}$$

Per la dimostrazione di veda [22], teorema 14.1 pag 201. Volendo applicare questo risultato al teorema di regolarità 2.20 è necessario provare che le derivate di u soddisfano l'equazione (2.22) per un'opportuna scelta di a^{ij}. Questo è il contenuto della prossima proposizione.

Proposizione 2.22 *Sia $A(p) := \frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}}$ per ogni $p \in \mathbb{R}^n$. Allora le soluzioni deboli in $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ di*

$$\operatorname{div} A(Du(x)) = 0,$$

ovvero le soluzioni dell'equazione delle superfici minime, sono funzioni $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}$. Inoltre, posto $w = D_s u$ ($s = 1, \ldots, n$), vale in senso debole

$$D_i(a^{ij} D_j w) = 0,$$

dove $a^{ij}(x) := \frac{\partial A_i}{\partial x^j}(Du(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(\delta^{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1+|Du|^2} \right).$

Una dimostrazione è scritta in [13], teorema C.1 ed è basata sul metodo dei rapporti incrementali. Infatti si tratta di mostrare che le funzioni

$$\tau_{h,s} Du(x) := \frac{Du(x + he_s) - Du(x)}{h}, \quad h \in (0, \varepsilon)$$

hanno norma L^2 equilimitata in h. Questo implica $D^2 u \in L^2(\Omega)$ e il teorema segue facilmente.

Capitolo 3

I controesempi di Lawson e Osserman

La teoria non parametrica delle superfici minime in codimensione 1, agli inizi degli anni '70 aveva raggiunto risultati molto soddisfacenti: i problemi di esistenza, unicità e regolarità erano stati positivamente risolti. Tuttavia, poco o nulla si sapeva sulla teoria non parametrica in codimensione arbitraria.

I controesempi di Blaine Lawson e Robert Osserman, pubblicati nel 1977 in [25] mostrano il perché di ciò: i risultati di codimensione 1 sono falsi in codimensione maggiore. In particolare l'esistenza di grafici minimi (ovvero soluzioni del sistema delle superfici minime (1.19)) con bordo assegnato non è garantita, indipendentemente dalla geometria del dominio Ω e dalla regolarità del dato al bordo. L'unicità delle soluzioni è altrettanto falsa, e le soluzioni del sistema delle superfici minime che, in codimensione 1 minimizzano l'area grazie alla convessità, in codimensione maggiore non sono necessariamente stabili. Infine la regolarità delle superfici minime Lipschitziane, garantita in codimensione 1 dal teorema di De Giorgi [5], non è vera in codimensione arbitraria, e in [25] si mostra un grafico minimo che è Lipschitziano ma non C^1. Questo risultato è ottimale perché in [15] si mostra che tale cono minimizza l'area e perché in [30] Morrey mostra che le soluzioni C^1 del sistema delle superfici minime sono analitiche.

3.1 Non esistenza

Il teorema di esistenza in codimensione 1, teorema 2.17, richiede un'ipotesi geometrica su Ω, ovvero che la curvatura media di $\partial\Omega$ sia ovunque non negativa e che Ω sia regolare. In questo caso, si ha esistanza per qualunque dato al bordo regolare. Il controesempio di Lawson e Osserman mostra che, in codimensione maggiore di 1, queste ipotesi non sono sufficienti.

Teorema 3.1 *Sia $\psi : S^{n-1} \to S^{m-1}$ di classe C^2 non omotopa in S^{m-1} ad un'applicazione costante, $n > m \geq 2$. Allora esiste $R_0 > 0$ dipendente da ψ tale che il problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime in B^n*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ij}\right) = 0 & j = 1, \dots, n \\ \displaystyle\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}\right) = 0 & \alpha = 1, \dots, m \\ u^\alpha\big|_{\partial\Omega} = R\psi^\alpha\big|_{\partial\Omega} & \alpha = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{3.1}$$

non ha soluzione per nessun $R \geq R_0$.

Lemma 3.2 *Sia $\Sigma \subset U$ una varietà Lipschitziana di classe C^2 in un intorno V del bordo. Allora, se Σ è minima nel senso dei varifold in $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e limitato, vale*

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{n} \int_{\partial\Sigma} x \cdot \nu(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x), \tag{3.2}$$

dove $\nu(x)$ è la normale esterna a $\partial\Sigma$ in x.

Dimostrazione Sia

$$\Sigma_r := \{x \in \Sigma : d(x, \partial\Sigma) \geq r\}.$$

Per compattezza di $\partial\Sigma$ esiste $r_0 > 0$ tale che per $r \leq r_0$ si abbia $\Sigma \backslash \Sigma_r \subset V$. Con l'uso della funzione distanza dal bordo, costruiamo una funzione regolare $\varphi_r(x) = \varphi_r(d(x, \partial\Sigma))$ tale che

$$\varphi_r\Big|_{\Sigma\backslash\Sigma_{\frac{r}{2}}} = 0, \quad \varphi_r\Big|_{\Sigma_r} = 1, \quad 0 \leq \varphi_r \leq 1.$$

Consideriamo i campi vettoriali $X(x) = x$ e $\widetilde{X}(x) = \varphi_r(x)X(x)$. Poiché Σ è minimo e $\widetilde{X} \in C^1_0(\Sigma)$ otteniamo

$$0 = \int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma \widetilde{X} d\mathcal{H}^n = \int_\Sigma \nabla^\Sigma \varphi_r \cdot X d\mathcal{H}^n + \int_\Sigma \varphi_r \operatorname{div}^\Sigma X d\mathcal{H}^n.$$

L'ultimo termine, essendo $\operatorname{div}^\Sigma X = n$, soddisfa

$$\int_\Sigma \varphi_r \operatorname{div}^\Sigma X d\mathcal{H}^n \to n\mathcal{A}(\Sigma).$$

Essendo φ_r costruita come funzione delle distanza, si ha

$$\int_\Sigma \nabla^\Sigma \varphi_r \cdot X d\mathcal{H}^n = \int_{\Sigma\backslash\Sigma_r} \nabla^\Sigma \varphi_r \cdot X d\mathcal{H}^n \to \int_{\partial\Sigma} X \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}; \tag{3.3}$$

infatti $\nabla^\Sigma \varphi_r \sim \nu \frac{\partial \varphi_r(\rho)}{\partial \rho}$ e $\int_0^r \frac{\partial \varphi_r(\rho)}{\partial \rho} = 1$ per ogni r. Si ottiene (3.3) scrivendo gli integrali in carte e applicando il teorema di Fubini-Tonelli. $\square$

Dimostrazione del teorema Nei primi due passi dimostriamo due disuguaglianze che daranno un assurdo.

1. Sia u una soluzione di (3.1) e sia Σ_R il suo grafico. Se $x \in \partial\Sigma_R$, dal teorema di Pitagora si ha $|x| = \sqrt{1+R^2}$. Ciò applicato a (3.2) dà

$$\mathcal{A}(\Sigma_R) \leq \frac{\sqrt{1+R^2}}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Sigma_R), \tag{3.4}$$

in cui si sta considerando $\partial\Sigma_R$ come una sottovarietà C^2 di $\mathbb{R}^{n+m}$ di dimensione $n-1$ e Σ_R regolare in un intorno del bordo. La regolarità è data dal teorema B.3 di Allard. D'altronde,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Sigma_R) = cR^{m-1} \tag{3.5}$$

perché, essendo $\pi_2(\Sigma_R) \subset RS^{m-1}$, $\pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \to \{0\} \times \mathbb{R}^m$, si ha che la proiezione $\pi_2 T_x \partial\Sigma_R$ è uno spazio di dimensione $m-1$ in $\mathbb{R}^m$. Quindi un'omotetia di $\mathbb{R}^m$ riscala l'area di $\partial\Sigma_R$ di un fattore R^{m-1}. Sostituendo (3.5) in (3.4), si ottiene

$$\mathcal{A}(\Sigma_R) \leq \frac{c\sqrt{1+R^2}}{n} R^{m-1} \leq c_1 R^m. \tag{3.6}$$

2. Sia sempre u la soluzione di (3.1). Dimostriamo che l'immagine di u contiene B^m. Se così non fosse, e $y_0 \in B^n$ fosse un punto non nell'immagine di u, avremmo una retrazione

$$\phi : B^m \backslash \{y_0\} \to S^{m-1}.$$

Possiamo, allora, costruire l'omotopia

$$F : [0,1] \times S^{n-1} \to S^{m-1}$$

data da

$$F(t,x) = \phi(u((1-t)x)).$$

È chiaro che $F(0,x) = \psi(x)$ e $F(1,x) = u(0)$ per ogni $x \in S^{n-1}$, contraddicendo l'ipotesi su ψ.

Sia $x_0 \in B^n$ tale che $u(x_0) = 0$, e quindi $\zeta := (x_0, 0) \in \Sigma_R$. Sia $(x,y) \in \partial\Sigma_R$. Allora

$$|\zeta - (x,y)| \geq |y| = R,$$

da cui

$$B_R(\zeta) \cap \partial\Sigma = \emptyset.$$

La formula di monotonia, proposizione A.17, dice che per $0 < r \leq R$ la funzione

$$\sigma(r) := \frac{\mathcal{A}(\Sigma_R) \cap B_r(\zeta)}{\omega_n r^n}$$

è monotona e $\lim_{r\to 0^+}\sigma(r)\geq 1$. Ciò implica che $\sigma(R)\geq R^n$, ovvero

$$\mathcal{A}(\Sigma_R)\geq \mathcal{A}(\Sigma_R)\cap B_R(\zeta)\geq \omega_n R^n. \tag{3.7}$$

3. Combinando prima (3.7) con (3.6) si ha

$$\omega_n R^n \leq \mathcal{A}(\Sigma_R)\leq c_1 R^m. \tag{3.8}$$

Poiché l'esponente a sinistra è maggiore di quello a destra, quest'ultima disuguaglianza, non può essere vera per una successione $R_i\to+\infty$. Sia

$$R_0=\sup\{R:\omega_n R^n\leq c_1 R^m\}<+\infty.$$

È chiaro che a causa di (3.8), Σ_R non può esistere se $R>R_0$. □

Osservazione L'ipotesi $n>m\geq 2$ non copre il caso di dimensione 2. In effetti esiste un significativo teorema dovuto a T. Rado [35] per cui il problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime in dimensione 2 e codimensione *arbitraria* è sempre risolubile fissato un dato al bordo continuo. Inoltre la soluzione u è continua fin sul bordo e analitica all'interno. Una dimostrazione si trova in [25]. •

3.2 Non unicità e non stabilità

Abbiamo osservato che in codimensione 1 le soluzioni dell'equazione delle superfici minime (equivalente al sistema delle superfici minime (1.24)) con dato al bordo assegnato è unica e minimizza l'area tra tutti gli altri grafici su Ω con lo stesso dato al bordo. Sia l'unicità che la stabilità non sono vere in codimensione più alta.

Teorema 3.3 *Esiste una funzione analitica $\psi:S^1\to\mathbb{R}^3$ tale che il sistema delle superfici minime* (1.24) *con dato al bordo ψ ammette 3 soluzioni analitiche. Inoltre una di esse è non stabile.*[1]

Cenni della dimostrazione Lawson e Osserman definiscono un dato al bordo ψ simmetrico: se $\Gamma\subset\mathbb{R}^5$ è il grafico di ψ, allora $\Gamma=\sigma(\Gamma)$, dove

$$\sigma(x^1,x^2,y^1,y^2,y^3):=(-x^2,x^1,-y^1,-y^3,y^2).$$

Riscalando tale dato definiscono $\Gamma_R:=\mathcal{G}_{r\psi}$.

Facendo uso della teoria di Morse dimostrano la seguente proposizione.

[1]Una superficie parametrizzata da un grafico $\mathcal{G}_u$ si dice instabile se per ogni $\varepsilon>0$ esiste v con $|u-v|<\varepsilon$ e $\mathcal{A}(\mathcal{G}_v)<\mathcal{A}(\mathcal{G}_u)$.

Proposizione 3.4 *Sia $F : B^2 \to \mathbb{R}^5$ una superficie minima parametrica con dato al bordo Γ_R e sia $\lambda : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\lambda(x^1, x^2, y^1, y^2, y^3) =: y^1.$$

Allora $\lambda \circ F$ ha un solo punto critico in B^2.

Grazie ad un lavoro di Douglas [7], esiste una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^5$ parametrizzata da $F : B^2 \to \mathbb{R}^5$ (non necessariamente un grafico su B^2) con bordo Γ_R che minimizza l'area tra le superfici Lipschitziane con bordo Γ_R omeomorfe a B^2. Supponiamo che tale superficie sia unica. Allora, per la proposizione 3.4, λ ha un solo punto critico su Σ. Poiché $\sigma \circ F$ parametrizza una superficie con la medesima area (σ è un'isometria) e con lo stesso bordo Γ_R, se assumiamo che Σ sia unica, dev'essere $\Sigma = \sigma(\Sigma)$ e $\sigma(p) = p$ per l'unicità del punto critico. Ne segue che $p = 0 \in \Sigma$.

La condizione $0 \in \Sigma$, la non esistenza di ulteriori punti critici, la forma di Γ_R e la simmetria di Σ implicano $\mathcal{A}_\Sigma \geq 4\pi R$; non è, tuttavia, difficile costruire una superficie Σ' omeomorfa a B^2 con bordo Γ_R e area

$$\mathcal{A}(\Sigma') \leq (2\pi + \varepsilon)R^2 + O(R) + \pi.$$

Ne segue un assurdo per R sufficientemente grande. □

Una volta provata l'esistenza di due superfici parametriche che minimizzano l'area, l'esistenza di una terza superficie minima parametrica segue da un lavoro di Morse e Tompkins [31]. Infine tutte e tre le superfici trovate sono non parametriche[2] grazie ad un teorema di Rado [35].

Osservazione A causa di questo controesempio, lo studio del sistema delle superfici minime non è equivalente alla soluzione del problema di Plateau. È evidente la differenza dalla codimensione 1: una soluzione dell'equazione delle superfici minime minimizza l'area tra i grafici e, se Ω è convesso, minimizza l'area anche tra le superfici non rappresentabili come grafici su Ω (teorema 2.3). •

3.3 Non regolarità: esistenza di coni minimi

Il problema della regolarità delle superfici minime non parametriche è intimamente legato alla natura del sistema delle superfici minime. In codimensione 1 tale sistema si riduce ad all'equazione ellittica in forma di divergenza (2.3); le soluzioni di tale equazione sono regolari grazie al teorema di De Giorgi, vedi [5]. Un teorema analogo non esiste per i sistemi ellittici e questa differenza tra la teoria scalare e la teoria vettoriale si concretizza nel seguente esempio.

[2] ovvero sono il grafico di una funzione.

Teorema 3.5 *Sia $\eta : S^3 \subset \mathbb{R}^4 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la mappa di Hopf definita da*

$$\eta(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z}_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3,$$

dove $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Allora l'applicazione Lipschitziana, ma non C^1,

$$u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

data da

$$u(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}|x|\eta\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \neq 0 \tag{3.9}$$

e $u(0) = 0$ soddisfa il sistema delle superfici minime (1.19).

Cenni di dimostrazione Consideriamo la famiglia di immersioni

$$i_\alpha : S^3 \to S^6$$

date da

$$i_\alpha(x) := \big(\alpha x, \sqrt{1-\alpha^2}\eta(x)\big), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Sia $SU(2)$ il gruppo delle matrici unitarie di determinante 1 in $\mathbb{C}^2$ e sia $SO(3)$ il gruppo delle matrici ortogonali di determinante 1 in $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$ per cui c'è una naturale immersione

$$SU(2) \hookrightarrow SU(2) \times SO(3),$$

attraverso la quale $SU(2)$ agisce su $S^6 \subset \mathbb{R}^7$. Grazie ad un teorema di Wu-Yi Hsiang [17], le orbite di maggior volume dell'azione sono sottovarietà di S^6 minime[3]. Data la grande simmetria di i_α, non è difficile mostrare che $i_\alpha(S^3)$ è un'orbita principale e che è sufficiente massimizzare l'area tra queste sottovarietà di S^6:

$$\mathcal{A}(i_\alpha(S^3)) = 2\pi^2\alpha(4 - 3\alpha^2),$$

che raggiunge il suo massimo in $[0, 1]$ per $\alpha = \frac{2}{3}$. Allora $i_{\frac{2}{3}}(S^3)$ è minima in S^6, da cui il cono C costruito su di essa è minimo in $\mathbb{R}^7$ perché, in generale, il cono costruito su una sottovarietà minima di S^n è una sottovarietà minima in $\mathbb{R}^{n+1}$. Infatti la curvatura media di C in x non ha componente parallela a x, quindi coincide, a meno di un riscalamento, con la curvatura media di $i_{\frac{2}{3}}(S^3)$ in S^6. Infine si verifica che C è il grafico della funzione f definita in (3.9).

Osservazione Grazie a questo controesempio è preciso il risultato di Morrey, teorema 5.10, secondo cui le soluzioni C^1 del sistema delle superfici minime sono analitiche. Per ottenere un risultato di regolarità sono neccessarie ulteriori ipotesi. Infatti proveremo la regolarità dei grafici di funzioni Lipschitziane *area-decreasing*. •

[3] S^6 è una varietà Riemanniana. Data una sua sottovarietà Σ sono ben definite le connessioni di Levi-Civita di S^6 e Σ. Di conseguenza si definisce anche la curvatura media H di Σ in S^6 che, in generale, non coincide con la curvatura media di Σ vista come sottovarietà di $\mathbb{R}^7$. Diremo che Σ è minima in S^6 se $H = 0$.

Capitolo 4

Esistenza in codimensione arbitraria

Il teorema di esistenza in codimensione 1 si basa sulle stime a priori del gradiente sul bordo per un'arbitraria soluzione u. Esse vengono ottenute attraverso la costruzione di barriere v che soddisfino

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Dv)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0. \tag{4.1}$$

In linea di principio, essendo il sistema delle superfici minime *non lineare*, dovremmo cercare barriere del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \leq 0 \tag{4.2}$$

e questo è molto più difficile perché, non conoscendo a priori Du (è quello che vogliamo stimare!), non conosciamo la costante di elletticità dei coefficienti $g^{ij}(Du)$. In codimensione 1 il lemma 2.12 dice che la costruzione di barriere che soddisfino (4.1) è sufficiente, ma, essendo tale lemma falso in codimensione maggiore di 1, non è possibile generalizzare questa procedure.

In questo capitolo mostreremo che, con ipotesi sulla norma C^2 del dato al bordo ψ, la costruzione di barriere è ancora possibile. Per fare ciò utilizzeremo il sistema parabolico associato al sistema delle superfici minime (il sistema del moto per curvatura media) ed il principio di massimo parabolico, mostrando che esistono quantità geometriche preservate durante l'evoluzione per curvatura media. A causa del controesempio di Lawson e Osserman, teorema 3.1, è naturale introdurre un'ipotesi sulle derivate del dato al bordo.

Utilizzeremo il moto per curvatura media per provare l'esistenza di una soluzione Lipschitziana del sistema delle superfici minime; nel prossimo capitolo proveremo che le soluzioni trovate (in generale non tutte le possibili soluzioni) sono anche C^∞. Questi risultati, dovuti a Mu-Tao Wang, sono apparsi nel 2003 e nel 2004 in [42] e [39].

Nella prossima sezione proviamo, invece, un risultato ben noto ai tempi dei controesempi di Lawson e Osserman: un teorema di esistenza locale basato sul teorema della funzione inversa.

4.1 Esistenza per dati piccoli in $C^{2,\alpha}$

Mostriamo che se la norma $\|\psi\|_{2,\alpha}$ è sufficientemente piccola, allora il problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime (1.25) ha soluzione regolare. Questa sezione è indipendente dal resto del capitolo e i risultati in essa contenuti non verranno utilizzati nelle sezioni successive.

Teorema 4.1 (Funzione inversa) *Siano E ed F spazi di Banach e sia $\Phi : E \to F$ di classe C^r, $r \geq 1$. Supponiamo che $D\Phi_{x_0}$ sia un isomorfismo di spazi di Banach*[1] *per un certo $x_0 \in E$. Allora esistono $U \subset E$ e $V \subset F$ intorni aperti di x_0 e $\Phi(x_0)$ rispettivamente tali che $\Phi(U) = V$*

$$\Phi\big|_U : U \to V$$

sia invertibile e l'inversa sia di classe C^r.

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema della funzione inversa in $\mathbb{R}^n$. Una versione completa per spazi di Banach si trova in [24].

Teorema 4.2 *Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, connesso e regolare, esiste una costante $C = C(\Omega)$ tale che se $\|\psi\|_{2,\alpha} < C$, allora il problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime con dato al bordo ψ (1.25) ha soluzione C^∞.*

Dimostrazione Sottointendiamo la somma sugli indici ripetuti e consideriamo l'operatore tra spazi di Banach

$$\Phi : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m) \to C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^m) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega; \mathbb{R}^m)$$

definita da

$$\Phi(u) := \Big(g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, u\big|_{\partial\Omega}\Big).$$

Il differenziale di Φ in u è

$$d\Phi_u(v) = \Big(g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial g^{ij}}{\partial p^\beta_k}(Du)\frac{\partial v^\beta}{\partial x^k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}, v\big|_{\partial\Omega}\Big).$$

[1] ovvero $D\Phi_{x_0}$ dev'essere invertibile e la sua inversa dev'essere continua. Quest'ultima ipotesi è, tuttavia, superflua grazie all'open mapping theorem: un'applicazione lineare continua e surgettiva tra spazi di Banach è aperta.

Si verifica facilmente che $d\Phi$ è continuo e che per $u = 0$ si riduce a

$$d\Phi_0(v) = \big(\Delta v, v\big|_{\partial\Omega}\big);$$

invertire $d\Phi_0$ vuol dire, dati $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $h \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, risolvere in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = f & \text{in } \Omega \\ v = h & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Come noto questo problema ha sempre soluzione in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e la soluzione è unica (principio di massimo). Dunque l'operatore $d\Phi_0$ è invertibile e l'inversa, per il teorema della mappa aperta, è continua.

Osserviamo che $\Phi(0) = 0$; allora il teorema della funzione inversa 4.1 implica che esiste un intorno di 0 $V \subset C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ contenuto nell'immagine di Φ. In particolare esiste $C > 0$ tale che $\{0\} \times B_C(0)$ è contenuto nell'immagine di Φ, e questo, assieme al teorema 5.10, conclude la dimostrazione. □

4.2 Equazioni paraboliche lineari

Enunciamo, senza dimostrazioni, alcuni risultati della teoria delle equazioni lineari paraboliche; un riferimento classico è il libro di Ladyžhenskaya, Ural'tseva e Solonnikov [23], si veda anche Lieberman [28].

Un'equazione parabolica (del secondo ordine) è un'equazioni del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = 0 \tag{4.3}$$

in un dominio $\Omega_T := \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dove i coefficienti a^{ij} sono ellittici e limitati, ovvero esistono $\lambda, \Lambda > 0$ tali che

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Se la scelta di λ può essere effettuata indipendentemente da x e t l'equazione (4.3) si dice *uniformemente parabolica.* Indichiamo con $\partial^*\Omega$ il bordo parabolico di Ω_T, ovvero

$$\partial^*\Omega_T := \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0,T).$$

Il principio di massimo parabolico è l'analogo del principio di massimo ellittico 2.11:

Proposizione 4.3 (Principio di massimo parabolico) *Data una soluzione $u : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ della disequazione uniformemente parabolica*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) \geq 0,$$

vale

$$\inf_{\Omega_T} u = \inf_{\partial^* \Omega_T} u,$$

mentre se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) \leq 0$$

si ha

$$\sup_{\Omega_t} u = \sup_{\partial^* \Omega_T} u.$$

Consideriamo il problema con dati al bordo e iniziali per un'equazione lineare parabolica a coefficienti non costanti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = 0 & \text{in}\, \Omega_T \\ u = \psi & \text{su}\, \partial^* \Omega_T \end{cases} \tag{4.4}$$

di cui studieremo la risolubilità in spazi di Hölder pesati.

Definizione 4.4 *Sia $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio regolare e limitato; per $u : \Omega_T \to \mathbb{R}^d$, $\alpha \in (0,1]$ definiamo le seminorme*

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{X,Y \in \Omega_T \\ X \neq Y}} \frac{|u(X) - u(Y)|}{|X - Y|^\alpha},$$

dove $X = (x,t)$, $Y = (y,s)$ e $|X - Y| = \max\{|x-y|, |t-s|^{1/2}\}$ è la distanza parabolica;

$$[u]_{1,\alpha} = [Du]_\alpha$$

$$[u]_{2,\alpha} = [D^2 u]_\alpha + [D_t u]_\alpha$$

Definiamo le corrispondenti norme

$$\|u\|_\alpha = \sup_{\Omega_T} |u| + [u]_\alpha$$

$$\|u\|_{1,\alpha} = \sup_{\Omega_T} |u| + \sup_{\Omega_T} |Du| + [u]_{1,\alpha}$$

$$\|u\|_{2,\alpha} = \sup_{\Omega_T} |u| + \sup_{\Omega_T} |Du| + \sup_{\Omega_T} \left| D^2 u \right| + \sup_{\Omega_T} |u_t| + [u]_{2,\alpha}$$

Definiamo anche i corrispondenti spazi di Hölder,

$$C^{r,\alpha}(\Omega_T) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^m \mid \|u\|_{r,\alpha} < \infty \right\}, \quad r = 0, 1, 2$$

che dotati delle corrispondenti norme sono spazi di Banach.

Si osservi che le derivate prime temporali sono trattate come derivate seconde spaziali; questo fatto si riflette anche nella definizione della distanza parabolica.

Osservazione Le funzioni Hölderiane sono uniformemente continue, per cui la loro continuità si estende fin sul bordo di Ω_T. Ad esempio le funzioni in $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$ hanno derivate spaziali seconde e derivata temporale continue fin sul bordo.

Questo fatto rende gli spazi introdotti insufficienti nello studio di un problema con dato iniziale e al bordo come (4.4). Se infatti il dato ψ non soddisfa l'*equazione di compatibilità*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = 0, \quad \text{su } \partial^* \Omega,$$

allora è chiaramente impossibile che una funzione $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$ soddisfi (4.4).

Per questo motivo introduciamo gli spazi pesati, utilizzando una funzione distanza che tenga conto del fatto che le derivate di ordine massimo, possono non essere continue fin sul bordo. •

Definizione 4.5 (Spazi di Hölder parabolici pesati) *Introduciamo la funzione distanza dal bordo parabolico:*

$$d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial^* \Omega); \; d(X,Y) := \min\{d(X), d(Y)\}.$$

$$[u]_0^* = \operatorname*{osc}_{\Omega} f, \; |f|_0^* = \sup_{\Omega} |f|$$

$$|u|_0^{(\delta)} = \begin{cases} \sup_{\Omega_T} d^\delta \, |u| & \text{se}\, b \geq 0 \\ \sup_{\Omega_T} (\operatorname{diam} \Omega)^\delta \, |f| & \text{se}\, b < 0 \end{cases}$$

$$[u]_\alpha^{(\delta)} = \sup \left\{ d(X,Y)^{\delta+\alpha} \frac{|u(X) - u(Y)|}{|X-Y|^\alpha} \right\}$$

$$[u]_{1,\alpha}^{(\delta)} = \sup \left\{ d(X,Y)^{\delta+1+\alpha} \frac{|Du(X) - Du(Y)|}{|X-Y|^\alpha} \right\}$$

$$[u]_{2,\alpha}^{(\delta)} = \sup \left\{ d(X,Y)^{\delta+2+\alpha} \left(\frac{\left| D^2u(X) - D^2u(Y) \right|}{|X-Y|^\alpha} + \frac{|D_t u(X) - D_t u(Y)|}{|X-Y|^\alpha} \right) \right\}$$

$$\|u\|_\alpha^{(\delta)} = |u|_0^{(\delta)} + [u]_\alpha^{(\delta)}$$

$$\|u\|_{1,\alpha}^{(\delta)} = |u|_0^{(\delta)} + |Du|_0^{(1+\delta)} + [u]_{1,\alpha}^{(\delta)}$$

$$\|u\|_{2,\alpha}^{(\delta)} = |u|_0^{(\delta)} + |Du|_0^{(1+\delta)} + \left| D^2 u \right|_0^{(2+\delta)} + |u_t|_0^{(2+\delta)} + [u]_{2,\alpha}^{(\delta)}$$

Definiamo di conseguenza anche gli spazi $C^{k,\alpha}_{(\delta)}$, $k = 0, 1, 2$. Le funzioni in questi spazi sono continue, eventualmente con le derivate, all'interno, ma, in generale, non fin sul bordo.

Il principale risultato di esistenza della teoria lineare che usiamo è contenuto nel teorema che segue.

Teorema 4.6 *Siano $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (1,2)$. Supponiamo che i coefficienti a^{ij} soddisfino la condizione di ellitticità (2.21) uniformemente in Ω_T, siano Hölderiani nel senso che*

$$\| a^{ij} \|^{(0)}_{\alpha} < \infty$$

e sia

$$\left| a^{ij}(X) - a^{ij}(Y) \right| \leq \zeta(|X - Y|) \tag{4.5}$$

per qualche funzione continua e crescente ζ con $\zeta(0) = 0$. Allora il problema (4.4) con dato al bordo $\psi \in C^{\delta}$ è unicamente risolubile in $C^{2,\alpha}_{(-\delta)}$ e

$$\|u\|^{(-\delta)}_{2,\alpha} \leq C \left(\| a^{ij} \|^{(0)}_{\alpha}, \lambda, \Lambda, \Omega_T, \zeta \right) \|\psi\|_{\delta} \tag{4.6}$$

Osservazione Se scegliamo δ e α tali che $\delta - \alpha > 1 + \theta$, $\theta \in (0, l)$ otteniamo

$$[Du]_{\theta} \leq \|u\|^{(-\delta)}_{1,\alpha} \leq C \, \|u\|^{(-\delta)}_{2,\alpha} < \infty,$$

che implica che la soluzione ha derivate prime Hölderiane e, quindi, continue fin sul bordo. •

Se l'equazione di compatibilità è soddisfatta, è possibile ottenere la regolarità $C^{2,\alpha}$ fin sul bordo:

Teorema 4.7 *Sia $\alpha \in (0,1)$ e siano i coefficienti a^{ij} in (4.4) α-Hölderiani, ellittici e soddisfino (4.5). Sia anche $\psi \in C^{2,\alpha}(\Omega_T)$. Supponiamo inoltre che valga la condizione di compatibilità per il dato al bordo e iniziale ψ:*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = 0, \quad \text{su } \partial\Omega \times \{0\}.$$

Allora il problema (4.4) ha un'unica soluzione in $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

4.3 Il problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime

Ricordiamo che il problema di Dirichlet non parametrico in forma di non divergenza per il sistema delle superfici minime è

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.7}$$

con $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, $g_{ij}(Du) = \delta_{ij} + \sum_l \frac{\partial u^l}{\partial x^i}\frac{\partial u^l}{\partial x^j}$ e $g^{ij}(Du)$ è la matrice inversa di $g_{ij}(Du)$.

Per risolvere questo sistema quasilineare ellittico, studiamo il sistema parabolico associato, che corrisponde al moto per curvatura media non parametrico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\, \Omega_\infty \\ u = \psi & \text{su}\, \partial^*\Omega_\infty, \end{cases} \tag{4.8}$$

con $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}_\infty)$ e $u = (u^1, \dots, u^m) \in C^2(\Omega_\infty) \cap C^0(\overline{\Omega}_\infty)$.

4.4 Il moto per curvatura media

Sia data una n-sottovarietà Σ in $\mathbb{R}^{n+m}$ parametrizzata da $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+m}$. Il moto per curvatura media parametrico di Σ è una famiglia di embedding

$$F_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad t \in [0,T)$$

tali che, posto $F(x,t) = F_t(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = H(F(t,x)) & \text{in } \Omega_T \\ F = F_0 & \text{su } \partial^*\Omega_T, \end{cases} \tag{4.9}$$

dove per $H(F(t,x))$ si intende il vettore curvatura media della sottovarietà $\Sigma_t := F_t(\Omega)$ nel punto $F(t,x)$.

Il moto per curvatura media è meno il flusso gradiente del funzionale area rispetto al prodotto scalare L^2 grazie all'equazione (1.17): deformiamo una data superficie $F_0(\Omega)$ nella direzione in cui l'area diminuisce più rapidamente.

La relazione tra il moto per curvatura media parametrico e il sistema (4.8) è descritto dalla proposizione che segue.

Proposizione 4.8 *Sia $F : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}^{n+m}$ una soluzione del moto per curvatura media parametrico (4.9) e supponiamo che $\Sigma_t := F_t(\Omega)$ possa essere scritto come grafico di una funzione con gradiente limitato su Ω per ogni $t \in [0,T)$. Allora esiste una famiglia di diffeomorfismi che lasciano invariato il bordo $r_t : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ tali che $\widetilde{F}_t = F_t \circ r_t$ è della forma*

$$\widetilde{F}(x) = (x, u(x)), \quad x \in \Omega,$$

dove

$$u : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}^m$$

è soluzione di (4.8) *con dato iniziale e al bordo* $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ *tale che*

$$F_0(x) = (x, \psi(x)).$$

Viceversa, data u soluzione di (4.8), *la famiglia di embedding*

$$\widetilde{F}_t := I \times u : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$$

soddisfa

$$\Big(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(t,x)\Big)^N = \widetilde{H}(t,x),$$

dove $\widetilde{H}(t,x)$ *è la curvatura media di* $\Sigma_t := \widetilde{F}_t$ *in* $\widetilde{F}(t,x)$.

Dimostrazione L'applicazione

$$\pi_1 \circ F_t : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$$

è una bigezione grazie all'ipotesi che Σ_t sia un grafico su $\overline{\Omega}$. Definiamo

$$r_t := (\pi_1 \circ F_t)^{-1}.$$

Chiaramente r_t è l'identità su $\partial\Omega$. Sia $\widetilde{F}(t,x) = F(t, r(t,x))$; allora

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, r(x,t)) + dF_t\Big(\frac{dr}{dt}\Big)(t,x),$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(t,x)\right)^N = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, r(t,x))\right)^N = \widetilde{H}(t,x). \tag{4.10}$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} \in \{0\} \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^i \partial x^j} \in \{0\} \times \mathbb{R}^m;$$

grazie a (1.6) vale

$$\Big(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^i \partial x^j}\Big)^N = \widetilde{H}, \tag{4.11}$$

inoltre la proiezione di $\{0\} \times \mathbb{R}^m$ su $N_{\widetilde{F}(t,x)}\Sigma_t$ è iniettiva, per cui abbiamo

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^i \partial x^j},$$

che è equivalente a (4.8). Il viceversa è analogo. $\square$

Nel seguito non faremo uso della proposizione precedente; utilizzeremo soltanto l'equazione (4.11) che ci permette di calcolare la variazione dell'area dei grafici delle soluzioni di (4.8).

Proveremo l'esistenza del moto per curvatura media per tutti i tempi attraverso il metodo di continuità seguendo Wang [41]: dimostriamo che l'insieme dei tempi per cui esiste una soluzione è sia aperto che chiuso[2]. Mediante il teorema di punto fisso di Caccioppoli-Schauder dimostriamo l'esistenza di una soluzione per tempi piccoli, provando l'apertura. Per quel che riguarda la chiusura abbiamo bisogno delle stime a priori delle sezioni che seguono: si tratta delle stime a priori del gradiente sul bordo e all'interno, e di un teorema di White [44] che dà le stime sulle derivate di ordine superiore.

4.4.1 Esistenza del moto per curvatura media per tempi piccoli

Teorema 4.9 *Sia* $\psi \in C^{\delta}(\overline{\Omega}_\infty)$ *per qualche* $\delta \in (1,2)$*. Allora esiste una costante* $\varepsilon > 0$ *tale che il problema* (4.8) *ha soluzione* $u \in C^{2,\alpha}_{(\delta)}(\Omega_\varepsilon)$*.*

Dimostrazione Scegliamo $\theta \in (1,\delta)$ e poniamo $M := 1 + [\psi]_\theta < +\infty$. Per un qualche $\varepsilon > 0$ da fissare definiamo

$$K = \{v \in C^{\theta}(\Omega_\varepsilon) : [v]_\theta \le M\}$$

e definiamo l'operatore non lineare

$$T : K \to C^{\theta}(\Omega_\varepsilon)$$

che associa a $u \in K$ la soluzione $Tu = v$ del sistema lineare disaccoppiato

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} = 0 & \text{in}\, \Omega_\varepsilon \\ v = \psi & \text{su}\, \partial^* \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{4.12}$$

Grazie al teorema 4.6, tale soluzione esiste in $C^{2+\alpha(\theta+1)}_{(\delta)}(\Omega_\varepsilon)$ e vale

$$[v]_1 \le [v]_\delta \le C[v]^{(-\delta)}_{2+\alpha(\theta-1)} \le C(M).$$

Di conseguenza $|v-\psi| \le C\varepsilon$ in Ω_ε e, per interpolazione, $[v-\psi]_\theta \le C\varepsilon^{\frac{\delta-\theta}{\delta}}$. Allora $[u]_\theta \le M$ per un ε sufficientemente piccolo che d'ora in poi si intende fissato. L'operatore T adesso manda K in sé; osservando che, in virtù del teorema di Ascoli-Arzelà, K è un sottoinsieme compatto di $C^1(\Omega_\varepsilon)$ e che è convesso (le seminorme sono convesse), è possibile applicare il teorema di punto

[2]Intendiamo che la soluzione esiste in $[0,t_0]$ se esistono per $(x,t) \to (x_0,t_0^-)$ i limiti delle derivate seconde spaziali e il limite delle derivate prime temporali

fisso di Caccioppoli-Schauder e ottenere un punto fisso $u \in C^{2+\alpha(\theta-1)}_{(-\delta)}(\Omega_\varepsilon)$ per T. Esso è soluzione del problema (4.8) in Ω_ε e, grazie al teorema 4.6, $u \in C^{2+\alpha}_{(-\delta)}(\Omega_\varepsilon)$.

□

4.5 Stime del gradiente sul bordo

Lemma 4.10 (Ellitticità e limitatezza di g^{ij}) *Siano*

$$g_{ij}(Du) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}$$

e $g^{ij}(Du)$ la matrice inversa di $g_{ij}(Du)$. Allora vale

$$\frac{1}{1+\eta}|\xi|^2 \leq g^{ij}(Du)(x)\xi_i\xi_j \leq |\xi|^2, \quad \eta = \sup_{\Omega_T}|Du|^2, \tag{4.13}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione È chiaro che g_{ij} è simmetrica, per cui è anche diagonalizzabile. Siano $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora anche g^{ij} è diagonalizzabile ed ha autovalori $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$. A questo punto si verifica facilmente che

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(Du)(\xi_i\xi_j) = |\xi|^2 + \Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq\alpha\leq m}} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\xi_i\Big)^2 \geq |\xi|^2.$$

Sia ora ξ_* un autovettore relativo all'autovalore più piccolo, λ_1. L'equazione precedente implica che, indicando con g l'applicazione lineare associata alla matrice g_{ij}, si ha

$$|\xi_*|^2 \leq \langle \xi_*, g\xi_*\rangle = \lambda_1|\xi_*|^2$$

e quindi $\lambda_i \geq 1$. Analogamente si ottiene che, posto λ_n l'autovalore più grande,

$$\lambda_n = \sup_{|\xi|=1}|g(\xi)| = 1 + |Du|^2.$$

La (4.13) segue immediatamente dalla stima sugli autovalori. □

Teorema 4.11 *Sia Ω limitato, convesso, liscio e sia $u \in C^{2,\alpha}_{(-\delta)}(\Omega_T;\mathbb{R}^m)$ una soluzione di* (4.8). *Allora vale la seguente stima*

$$|Du| < 4n\,\mathrm{diam}\,\Omega(1+\eta)\sup_{\Omega}\big|\,D^2\psi\,\big| + \sqrt{2}\sup_{\partial\Omega}|D\psi| \ \text{ su}\,\partial\Omega\times[0,T), \tag{4.14}$$

dove $\eta = \sup_{\Omega_T}|Du|^2$.

Si osservi che l'ipotesi $u \in C^{2,\alpha}_{(-\delta)}(\Omega_T;\mathbb{R}^m)$ implica $u \in C^2(\Omega_T;\mathbb{R}^m) \cap C^1(\overline{\Omega} \times (0,T);\mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione Sia $p \in \partial\Omega$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ l'iperpiano tangente a $\partial\Omega$ in p; definiamo d la funzione distanza da $\Gamma \times (0,T)$ in Ω_T, i.e.

$$d(x,t) = \mathrm{dist}(x,\Gamma).$$

Poiché d è lineare $\sum g^{ij} D_{ij} d = 0$. Fissato $1 \leq l \leq m$ costruiamo la *barriera*

$$v(x,t) = k \log(1+\rho d) - (u^l - \psi^l).$$

Risulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} - g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{k\rho^2}{(1+\rho d)^2} g^{ij}(Du) \frac{\partial d}{\partial x^i}\frac{\partial d}{\partial x^j} - g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 \psi^l}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (4.15)$$

Abbiamo usato che u è soluzione e ψ non dipende da t. Grazie alla stima di ellitticità sui g^{ij}, disuguaglianza (4.13), e $|Dd| = 1$ si ha $g^{ij} D_i d D_j d \geq \frac{1}{1+\eta}$ e dunque

$$\frac{\partial v}{\partial t} - g^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} \geq \frac{k\rho^2}{(1+\rho d)^2}\frac{1}{1+\eta}.$$

$$g^{ij}(Du)\frac{\partial^2 \psi^l}{\partial x^i \partial x^j} \leq n \sup_{\Omega} \left| D^2\psi \right| .$$

Quindi, se

$$\frac{k\rho^2}{(1+\rho \,\mathrm{diam}\,\Omega)^2}\frac{1}{1+\eta} \geq n \sup_{\Omega} \left| D^2\psi \right| , \quad (4.16)$$

abbiamo $v_t - \sum g^{ij} D_{ij} v \geq 0$ su Ω_T. Ora $v(x,t) \geq 0$ su $\partial^*\Omega$, per cui il principio di massimo forte parabolico implica $v > 0$ in Ω_T. Poiché $v(p,t) = 0$ per ogni $t \in [0,T)$ si ha

$$0 < \frac{\partial v}{\partial n} = k\rho - \frac{\partial(u^l - \psi^l)}{\partial n}, \text{ i.e.}$$

$$\frac{\partial u^l}{\partial n} < k\rho + \frac{\partial \psi^l}{\partial n}.$$

La costruzione di una barriera inferiore produce un'analoga stima per $-\frac{\partial u}{\partial n}$ per cui

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < k\rho + \left|\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|$$

e poiché $u\big|_{\partial\Omega} = \psi\big|_{\partial\Omega}$

$$D^{\partial\Omega} u = D^{\partial\Omega}\psi$$

si ottiene

$$|Du| < \sqrt{\left(k\rho + \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|\right)^2 + |D^{\partial\Omega}\psi|^2} \leq k\rho + \sqrt{2}\,|D\psi| \ \text{in}\, p. \quad (4.17)$$

Per ottenere la stima (4.16) si pone $\rho = (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}$ e

$$k = 4n(\operatorname{diam}\Omega)^2(1+\eta)\sup_{\Omega}\left| D^2\psi \right| ,$$

da cui (4.17) diventa (4.14). $\square$

4.6 Stime del gradiente all'interno

Introduciamo la funzione

$$*\omega = \frac{1}{\sqrt{\det(I + Du^T Du)}} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (1+\lambda_i^2)}}, \tag{4.18}$$

dove i λ_i sono i valori singolari di Du, i.e. le radici quadrate degli autovalori di $Du^T Du$. Valgono le seguenti relazioni, facilmente verificabili:

$$*\omega > \frac{1}{\sqrt{2-\delta}} \Rightarrow |Du|^2 < 1-\delta; \quad |Du| < \sqrt{(2-\delta)^{1/n} - 1} \Rightarrow *\omega > \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}. \tag{4.19}$$

4.7 Evoluzione di $*\omega$

Sia ω la n-forma su $\mathbb{R}^{n+m}$ definita da

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$$

$$\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0 \quad \text{se } i_1 < \dots < i_n,\ i_n > n.$$

Le derivate covarianti di un tensore sono ben definite su una varietà Riemanniana: consideriamo in particolare $\omega \in \mathcal{T}_n(\Sigma)$, lo spazio degli n-tensori *covarianti*. Per definizione

$$\nabla_X^\Sigma \omega(Y_1, \dots, Y_n) := D_X \omega(Y_1, \dots, Y_n) - \sum_{i=1}^n \omega(Y_1, \dots, \nabla_X^\Sigma Y_i, \dots, Y_m).$$

Inoltre il Laplaciano di un tensore può essere definito come

$$\Delta_\Sigma \omega = \nabla_{\tau_k}^\Sigma \nabla_{\tau_k}^\Sigma \omega.$$

Lemma 4.12 *Sia ω definita come sopra per la sottovarietà Riemanniana $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Sia data in un intorno di un punto p una base ortonormale $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$. Allora in p si ha*

$$(\Delta_\Sigma \omega)(\tau_1, \dots, \tau_n) = \Delta_\Sigma(\omega(\tau_1, \dots, \tau_n)) = \Delta_\Sigma * \omega.$$

Dimostrazione Siano

$$\omega(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\omega_{1\cdots n},\quad (\Delta_\Sigma\omega)(\tau_1,\ldots,\tau_n)=(\Delta_\Sigma\omega)_{1\cdots n}.$$

Allora

$$\begin{aligned}(\Delta_\Sigma\omega)_{1\cdots n}&=D_{\tau_k}\left(\nabla^\Sigma_{\tau_k}\omega(\tau_1,\ldots,\tau_n)\right)-\sum_i D_{\tau_k}\omega(\tau_1,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\ldots,\tau_n)=\\&=D_{\tau_k}D_{\tau_k}(\omega(\tau_1,\ldots,\tau_n))-2\sum_{i,k}D_{\tau_k}\left(\omega(\tau_1,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\ldots,\tau_n)\right)+\\&\quad+\sum_{i,j,k}\omega\left(\tau_1,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j,\ldots,\tau_n)\right)=a+b+c,\end{aligned}\tag{4.20}$$

dove $a=\Delta_\Sigma(\omega(\tau_1,\ldots,\tau_n))$ perché $\{\tau_k\}$ è una base ortonormale del tangente, $b=0$ perché $\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\tau_i\rangle=\frac{1}{2}D_{\tau_k}\langle\tau_i,\tau_i\rangle=0$ e ω è alternante. Infine, anche $c=0$:

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k}\omega\left(\tau_1,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\ldots,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j,\ldots,\tau_n)\right)=\\&\quad=-\sum_{\substack{i,j,k\\i\neq j}}\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\tau_j\rangle\langle\tau_i,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j\rangle\omega_{1\cdots n}-\sum_{j,k}\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j\rangle\omega_{1\cdots n}=\\&\qquad=\left(\sum_{\substack{i,j,k\\i\neq j}}\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\tau_j\rangle^2-\sum_{j,k}\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_j\rangle\right)\omega_{1\cdots n}=0.\end{aligned}\tag{4.21}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che per $i=j$ fissati

$$\sum_{\substack{j\\i\neq j}}\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\tau_j\rangle^2=\left|\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i\right|^2=\langle\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i,\nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i\rangle.$$

Sommando su i e su k si conclude. □

Lemma 4.13 (Equazione di Codazzi) *Siano $h^\alpha_{ij}=\left(\nabla_{\tau_i}\tau_j\right)\cdot\nu_\alpha$ e $h^\alpha=H\cdot\nu_\alpha$ le coordinate locali della seconda forma fondamentale e della curvatura media, rispettivamente:*

$$h(X,Y)=h^\alpha_{ij}X^iY^j\nu_\alpha,\quad H=h^\alpha\nu_\alpha.$$

Allora

$$h^\alpha_{ik,k}=h^\alpha_{,i}\tag{4.22}$$

dove le virgole indicano la derivata covariante.

Dimostrazione La connessione di $\mathbb{R}^{n+m}$ è piatta, nel senso che la curvatura è nulla, per cui

$$h^\alpha_{ik,k} = D_{\tau_k}\langle\nabla_{\tau_i}\tau_k, \nu_\alpha\rangle = \langle\nabla_{\tau_k}(\nabla_{\tau_i}\tau_k), \nu_\alpha\rangle + \langle\nabla_{\tau_i}\tau_k, \nabla_{\tau_k}\nu_\alpha\rangle = \\ = \langle\nabla_{\tau_i}(\nabla_{\tau_k}\tau_k), \nu_\alpha\rangle + \langle\nabla_{\tau_k}\tau_k, \nabla_{\tau_i}\nu_\alpha\rangle = D_{\tau_i}\langle H, \nu_\alpha\rangle.$$

□

Notazione Nel seguito scriveremo

$$\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots\beta^j\cdots n} := \omega_{1\cdots(i-1)\alpha(i+1)\cdots(j-1)\beta(j+1)\cdots n}$$

per indicare che α occupa l'i-esimo posto e β il j-esimo.

Proposizione 4.14 *Lungo il flusso per curvatura media, ω soddisfa la seguente equazione:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\Sigma\right)\omega_{1\cdots n} = \omega_{1\cdots n}\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2 - \sum_{\substack{i,j,k,\alpha,\beta \\ i\neq j}} \omega_{1\cdots\alpha^i\cdots\beta^j\cdots n}h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk}, \tag{4.23}$$

dove nell'ultima somma α occupa il posto i-esimo e β il posto j-esimo.

Dimostrazione Essendo costante, ω è ovviamente parallela su $\mathbb{R}^{n+m}$, ovvero $\nabla\omega = 0$. Quindi

$$\left(\nabla^\Sigma_{\tau_k}\omega\right)_{1\cdots n} = \left((\nabla^\Sigma_{\tau_k} - \nabla_{\tau_k})\omega\right)_{1\cdots n} = \sum_i \omega(\tau_1, \dots, \nabla_{\tau_k}\tau_i - \nabla^\Sigma_{\tau_k}\tau_i, \dots, \tau_n).$$

Ricordando che $\nabla^N_{\tau_k}\tau_i = \sum_\alpha h^\alpha_{ik}\nu_\alpha$ e $\omega_{1\cdots n,k} := \nabla^\Sigma_{\tau_k}\omega(\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$\omega_{1\cdots n,k} = \sum_{i,\alpha}\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n}h^\alpha_{ik}. \tag{4.24}$$

Similmente

$$\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n,k} = -\sum_l \omega_{1\cdots l^i\cdots n}h^\alpha_{lk} + \sum_{\substack{\beta,j \\ i\neq j}}\omega_{1\cdots\beta^j\cdots\alpha^i\cdots n}h^\beta_{jk}.$$

$$\omega_{1\cdots n,kk} = \sum_{\alpha,i}\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n,k}h^\alpha_{ik} + \sum_{\alpha,i}\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n}h^\alpha_{ik,k}. \tag{4.25}$$

Possiamo applicare l'equazione di Codazzi (4.22), ottenere $h^\alpha_{ik,k} = h^\alpha_{,i}$ e sviluppare (4.25):

$$\omega_{1\cdots n,kk} = \\ = -\sum_{\alpha,i,l,k}\omega_{1\cdots l^i\cdots n}h^\alpha_{lk}h^\alpha_{ik} + \sum_{i\neq j}\omega_{1\cdots\beta^j\cdots\alpha^i\cdots n}h^\beta_{jk}h^\alpha_{ik} + \sum_{\alpha,i}\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n}h^\alpha_{,i} = \\ = -\omega_{1\cdots n}\sum_{i,k,\alpha}(h^\alpha_{ik})^2 + \sum_{i\neq j}\omega_{1\cdots\beta^j\cdots\alpha^i\cdots n}h^\beta_{jk}h^\alpha_{ik} + \sum_{\alpha,i}\omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n}h^\alpha_{,i} \tag{4.26}$$

Per calcolare $\frac{\partial}{\partial t}\omega$ fissiamo un tempo $t > 0$, un punto $p \in \Sigma_t$ e consideriamo $F : \Omega_T \to \mathbb{R}^{n+m}$ una parametrizzazione del flusso per curvature media tale che $\frac{\partial F}{\partial t} \in N\Sigma$ e tale che $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}_p$ (si intende $\partial_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}$) sia una base ortonormale di $T_p\Sigma$ che evolve in una base ortonormale, diciamo per i tempi in $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Questo può sempre essere fatto con una riparametrizzazione locale di Ω basata sul teorema della funzione inversa.

Con queste scelte e con $g_{ij} := \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x^j}$ si ha che in p

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\langle (\nabla_{\partial_i} H)^T, \partial_j\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle \partial_i, (\nabla_{\partial_j} H)^T\rangle. \tag{4.27}$$

In $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times \{p\}$ valgono $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 0$, $g = \sqrt{\det g} = 1$; inoltre $\frac{\partial}{\partial t}\partial_i = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} H = \nabla_{\partial_i} H$ per cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{g}\omega(\partial_1, \ldots, \partial_n)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\omega(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \\ &= \sum_i \omega\left(\partial_1, \ldots, \partial_{i-1}, (\nabla_{\partial_j} H)^N, \partial_{i+1}, \ldots, \partial_n)\right) + \\ &\quad + \sum_i \omega\left(\partial_1, \ldots, \partial_{i-1}, (\nabla_{\partial_j} H)^T, \partial_{i+1}, \ldots, \partial_n)\right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

L'ultima somma è nulla perché ponendo $i = j$ in (4.27) si ottiene che $(\nabla_{\partial_j} H)^T$ non ha componente lungo ∂_j e le altre componenti non contano perché ω è alternante. Abbiamo dunque ottenuto

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_{1\cdots n} = \sum_i \omega_{1\cdots\alpha^i\cdots n} h_{\alpha,i}. \tag{4.29}$$

Combinando (4.29) con (4.26) e applicando il lemma 4.12 si conclude. □

Ricordiamo la decomposizione in valori singolari.

Lemma 4.15 *Data un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ esistono basi ortonormali $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ e $\{w_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,m}$ per $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$ rispettivamente tali che la matrice $\lambda_{i\alpha}$ associata a L in tali basi sia diagonale, i.e. $\lambda_{i\alpha} = 0$ se $i \neq \alpha$.*

Applichiamo tale lemma a $Du : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fissando $t > 0$, $x_0 \in \Omega$ e fissiamo basi ortonormali $\{v_i\}_{i=1,\ldots,n}$ e $\{w_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,m}$ come nel lemma 4.15. A tali basi associamo una base dello spazio tangente e dello spazio normale al grafico di $u(t,\cdot)$ in $(x_0, u(t, x_0))$:

$$\left\{\tau_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_\beta \lambda_{i\beta}^2}}(v_i + \sum_\beta \lambda_{i\beta} w_\beta)\right\}_{i=1,\ldots,n}$$

$$\left\{\nu_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_j \lambda_{j\alpha}^2}}(w_\alpha - \sum_j \lambda_{j\alpha} v_j)\right\}_{\alpha=1,\dots,m}$$

Osserviamo che, detta π la proiezione di $\mathbb{R}^{n+m}$ sulle prime n coordinate, si ha

$$\pi(\nu_\alpha) = -\sum_j \lambda_{j\alpha}\pi(\tau_j). \tag{4.30}$$

Poiché $\omega(a_1,\dots,a_n) = \omega(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n))$, si può utilizzare (4.30) per calcolare

$$\omega_{1\cdots\beta^j\cdots\alpha^i\cdots n} = \omega_{1\cdots n}(-\lambda_{\beta j}\lambda_{\alpha i} + \lambda_{\beta i}\lambda_{\alpha j}) \tag{4.31}$$

Ora la proposizione 4.14 si può riscrivere in termini dei valori singolari di Du:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\Sigma\right) * \omega &= *\omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h_{ik}^\alpha)^2 + \sum_{\substack{i,j,\alpha,\beta k\\ i\neq j}}(-\lambda_{\beta j}\lambda_{\alpha i} + \lambda_{\beta i}\lambda_{\alpha j})h_{ik}^\alpha h_{jk}^\beta\Big) = \\ &= *\omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h_{ik}^\alpha)^2 + \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(-\lambda_j\lambda_i h_{ik}^i h_{jk}^j + \lambda_j\lambda_i h_{jk}^i h_{ik}^j\Big) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Proposizione 4.16 *Sia* $*\omega \geq \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$. *Allora*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\Sigma\right) * \omega \geq \delta|A|^2, \tag{4.33}$$

dove $|A|^2 = \sum_{\alpha,i,j}|h_{ij}^\alpha|^2$ *è la norma al quadrato della seconda forma fondamentale.*

Dimostrazione Useremo il fatto che l'ipotesi su $*\omega$ implica $\sum_i \lambda_i^2 \leq 1-\delta$ e $0 \leq \lambda_i\lambda_j \leq 1-\delta$, ad esempio seguendo (4.19).

1. Supponiamo $n \leq m$.

$$\sum_{\alpha,i,k}(h_{ik}^\alpha)^2 = \sum_{\substack{\alpha,i,k\\ \alpha>n}}(h_{ik}^\alpha)^2 + \sum_{i,k}(h_{ik}^i)^2 + \sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(h_{jk}^i)^2.$$

Stimiamo il secondo membro di (4.32), che semplifichiamo perché $\lambda_{i\alpha}$ è diagonale:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{ik}h^j_{jk}+\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{jk}h^j_{ik}\geq\\
&\qquad\geq\delta|A|^2+(1-\delta)\sum_{i,k}(h^i_{ik})^2+(1-\delta)\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(h^i_{jk})^2+\\
&\quad-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{ik}h^j_{jk}-(1-\delta)\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}|h^i_{jk}h^j_{ik}|\geq\delta|A|^2+\sum\lambda_i^2\sum_{i,k}(h^i_{ik})^2+\\
&\quad+(1-\delta)\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(h^i_{jk})^2-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j|h^i_{ik}h^j_{jk}|-(1-\delta)\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}|h^i_{jk}h^j_{ik}|\geq\\
&\geq\delta|A|^2+(1-\delta)\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(h^i_{jk})^2-|h^j_{ik}h^i_{jk}|)+\Big(\sum_{i,k}h^i_{ik}\lambda_i\Big)^2-\sum\lambda_i\lambda_j h^i_{ik}h^j_{jk}\geq\\
&\qquad\geq\delta|A|^2+\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}(|h^i_{jk}|-|h^j_{ik}|)^2+\Big(\sum_{i,k}\lambda_i h^i_{ik}\Big)^2\geq\delta|A|^2.
\end{aligned}\tag{4.34}$$

2. Il caso $m\leq n$ si può ricondurre al caso $m=n$ e quindi al punto precedente osservando che in

$$\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2-\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{ik}h^j_{jk}+\sum_{\substack{i,j,k\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{jk}h^j_{ik}$$

il secondo e il terzo addendo sono nulli se $i>m$ o $j>m$, mentre nel primo addendo è lecito trascurare i termini corrispondenti a $i>m$ o $j>m$ perché positivi. $\square$

Teorema 4.17 *Supponiamo che il dato iniziale ψ soddisfi*

$$8n\operatorname{diam}\Omega\sup_\Omega\left|D^2\psi\right|+\sqrt{2}\sup_{\partial\Omega}|D\psi|<\sqrt{2^{1/n}-1}.\tag{4.35}$$

Allora esiste $\delta\in(0,1)$ tale che le soluzioni del sistema del moto per curvature media (4.8) soddisfino

$$\sup_{\Omega_T}|Du|^2<1-\delta.\tag{4.36}$$

Dimostrazione Le ipotesi implicano che $\frac{1}{\sqrt{\det(I+D\psi^T D\psi)}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$, ovvero $*\omega>\frac{1}{\sqrt{2}}$ al tempo $t=0$. Per continuità di $*\omega$ e compattezza di $\overline{\Omega}$ possiamo trovare $\delta\in(0,1)$ tale che $*\omega>\frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ al tempo $t=0$ e

$$8n\operatorname{diam}\Omega\sup_\Omega\left|D^2\psi\right|+\sqrt{2}\sup_{\partial\Omega}|D\psi|<\sqrt{(2-\delta)^{1/n}-1}.$$

Dunque dalla proposizione 4.16, finchè la condizione $*\omega > \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ si mantiene vera

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\Sigma\right) * \omega \geq \delta |A|^2. \tag{4.37}$$

in cui A è la seconda forma fondamentale. Supponiamo, per assurdo, che ci sia un primo istante t_0 in cui per un certo $x_0 \in \Omega$ valga $*\omega = \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$. Allora per le stime del gradiente sul bordo (4.14), poiché grazie a (4.19) $\sup_{\Omega\times[0,t_0)} |Du|^2 \leq 1-\delta$ abbiamo

$$\sup_{\partial\Omega\times[0,t_0)} |Du| < 8n \operatorname{diam}\Omega \sup_{\Omega} \left| D^2\psi \right| + \sqrt{2} \sup_{\partial\Omega} |D\psi| < \sqrt{(2-\delta)^{1/n} - 1},$$

che, grazie a (4.19), implica che $*\omega > \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ sul bordo. Dunque x_0 è un punto interno in cui $*\omega$ assume un minimo più piccolo del minimo sul bordo. Assurdo perché il principio di massimo parabolico si applica a (4.37). Dunque rimane vero per tutti i tempi (in $[0, T)$) che $*\omega > \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ e quindi $|Du|^2 < 1-\delta$. □

4.8 Esistenza per tutti i tempi del flusso per curvatura media

Le stime a priori di $\sup_{\Omega_T} |u| + \sup_{\Omega_T} |Du|$, in codimensione 1, generano anche le stime a priori sulle derivate di ordine superiore (proposizione 2.16), grazie al teorema di De Giorgi. In codimensione arbitraria le stime a priori sulle derivate di ordine superiore non sono in generale disponibili: se fosse possibile ottenere una stima $C^{1,\alpha}$ che dipenda solo dal $\sup |Du|$ e quindi dalla norma L^∞ dei coefficienti g^{ij}, potremmo facilmente provare la regolarità delle soluzioni Lipschitziane del sistema delle superfici minime. Tale risultato, ad ogni modo, è falso a causa del cono esibito da Lawson e Osserman nel teorema 3.5.

Lo strumento che utilizzeremo per ottenere le stime sulle derivate di ordine alto è un teorema di Brian White [44].

Il lavoro è articolato nei seguenti passi:

1. usiamo il teorema 4.9 per provare l'esistenza per tempi piccoli;

2. supponendo di aver provato l'esistenza del flusso per curvatura media in $[0, t_0)$, studiamo la possibilità che appaiano singolarità in t_0 e, grazie alle stime a priori del gradiente e della condizione area-decreasing, si ottiene che la seconda forma fondamentale delle superfici Σ_t, $t < t_0$ svaniscono su un opportuno blow-up parabolico;

3. dal passo precedente si deduce la possibilità di applicare il teorema di White ottenedo stime a priori $C^{2,\alpha}$;

4. la soluzione converge con le derivate per $t \to t_0^-$, per cui si può riapplicare il teorema di esistenza per tempi piccoli e concludere che c'è esistenza per tutti i tempi.

4.8.1 Il blow-up parabolico, la densità Gaussiana ed il teorema di White

Possiamo considerare un flusso per curvatura media F in $\mathbb{R}^{n+m}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+m} \times [0, t_0)$, semplicemente associando ad

$$F : \overline{\Omega} \times [0, t_0) \to \mathbb{R}^{n+m}$$

la sua traccia nello spazio-tempo:

$$\mathcal{M} = \{(F(x,t), t) : x \in \overline{\Omega}, t \in [0, t_0)\}. \tag{4.38}$$

Definizione 4.18 (Densità Gaussiana) *Sia $\mathcal{M}$ un flusso per curvatura media come in (4.38). Allora la densità Gaussiana di $\mathcal{M}$ in $X = (x,t)$ di raggio r è*

$$\Theta(\mathcal{M}, X, r) := \int_{y \in \mathcal{M}(t-r^2)} \frac{1}{(4\pi r^2)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|y-x|^2}{4r^2}} d\mathcal{H}^n(y),$$

in cui si intende che $\mathcal{M}(t-r^2) = \mathcal{M} \cap \{X = (y,s) : s = t - r^2\}$.

Si può provare, in analogia con la formula di monotonia per le superfici minime, che la quantità $\Theta(\mathcal{M}, X, r)$ è monotona in r per cui ha limite e definiamo

$$\Theta(\mathcal{M}, X) := \lim_{r \to 0} \Theta(\mathcal{M}, X, r). \tag{4.39}$$

Teorema 4.19 (White) *Per ogni $0 < \alpha < 1$ esistono $\varepsilon = \varepsilon(n,m,\alpha) > 0$ e $C = C(n,m,\alpha) > 0$ tali che se $\mathcal{M}$ è il flusso per curvatura media di un grafico n dimensionale in $\mathbb{R}^{n+m}$ e se per un certo aperto $U \in \mathbb{R}^{n+m} \times [0,t)$ ed ogni $X \in U$ ed $0 < r < \mathrm{dist}(x, U^c)$ vale*

$$\Theta(\mathcal{M}, X, r) \leq 1 + \varepsilon,$$

allora

$$\left\| u\big|_U \right\|_{2,\alpha} \leq C,$$

dove u è la funzione il cui grafico parametrizza il flusso per curvatura media e la norma di Hölder è quella parabolica.

Osservazione Questo teorema, da confrontare con il teorema di Allard, che ne è l'analogo ellittico, dice che possiamo avere stime *locali* sulle derivate di ogni ordine a patto di avere un controllo sulla densità Gaussiana (che è l'equivalente della densità definita in (B.1)). •

Per applicare questo teorema abbiamo bisogno della nozione di blow-up parabolico. Esso, similmente al blow-up definito nella proposizione 5.1, è una dilatazione dello spazio ambiente (lo spazio-tempo) fatta in modo da preservare il flusso per curvatura media. In tal senso è necessario trattare la variabile temporale diversamente dalla variabile spaziale, come già fatto nell'introduzione dello norme di Hölder paraboliche.

Definizione 4.20 *Il blow-up parabolico di uno spazio-tempo* $\mathbb{R}^{n+m} \times [0, t_0)$ *in* (y_0, t_0) *con parametro* λ *è la bigezione*

$$D_\lambda : \mathbb{R}^{n+m} \times [0, t_0) \to \mathbb{R}^{n+m} \times [-\lambda^2 t_0, 0)$$

definita da

$$D_\lambda(y, t) = (\lambda(y - y_0), \lambda^2(t - t_0)). \tag{4.40}$$

Studiare la densità in un punto di un flusso per curvatura media definita in (4.39) è equivalente a studiare

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \Theta(D_\lambda \mathcal{M}, 0, r).$$

4.8.2 Il teorema di esistenza per tutti i tempi

Teorema 4.21 *Sia* $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *che soddisfi* (4.35)*. Allora il moto per curvatura media, soluzione di* (4.8)*, esiste in* $C^\infty(\Omega_\infty) \cap C^1(\overline{\Omega}_\infty)$*; inoltre esiste* $\delta > 0$ *tale che* $|Du(x,t)| \le 1 - \delta$ *per ogni* $(x,t) \in \overline{\Omega}_\infty$.

Dimostrazione Procediamo per passi.

1. Grazie al teorema 4.9 esiste $\varepsilon > 0$ ed una soluzione $u \in C^{2,\alpha}_{(\delta)}(\Omega_\varepsilon)$ del sistema (4.8).

2. Grazie all'osservazione successiva al teorema 4.6, la soluzione trovata è anche in $C^1(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ nel senso che per ogni $t \in (0, \varepsilon)$, $u(t, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$. Di conseguenza possiamo applicare le stime del gradiente sul bordo e all'interno date dal teorema 4.17 e concludere che $|Du| \le 1 - \delta$.

3. L'insieme dei tempi per cui esiste la soluzione è chiuso: se $t_0 < +\infty$ è il sup dei tempi per cui la soluzione u esiste, allora esistono i limiti delle derivate spaziali e della derivata temporale per $t \to t_0^-$. Per provare questo studiamo la possibilità che si formi una singolarità in (y_0, t_0), $y_0 \in \Omega$.

Usiamo il nucleo del calore all'indietro[3] in (y_0, t_0), introdotto da Huisken in [18]:

[3] si chiama nucleo del calore *all'indietro* (backward heat kernel) perché rispetto al nucleo del calore standard abbiamo $t < t_0$ e al posto di $t - t_0$ troviamo $t_0 - t$; in effetti esso viene utilizzato per studiare il flusso per curvatura media *prima* di un certo istante.

$$\rho_{y_0,t_0}(y,t) := \frac{1}{(4\pi(t_0-t))^{\frac{n}{2}}}\exp\Big(\frac{-|y-y_0|^2}{4(t_0-t)}\Big);$$

Con una formula di monotonia Huisken prova che $\lim_{t\to t_0}\int \rho_{y_0,t_0}d\mu_t$ esiste, dove $\mu_t = \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma_t$ e Σ_t è la superficie che si muove per curvatura media. Inoltre il nucleo del calore all'indietro soddisfa la seguente equazione provata da M-T. Wang in [40]

$$\frac{d}{dt}\rho_{y_0,t_0} = -\Delta_{\Sigma_t}\rho_{y_0,t_0} - \rho_{y_0,t_0}\Big(\frac{|F^N|^2}{4(t-t_0)^2} + \frac{F^N\cdot H}{t-t_0}\Big),$$

dove $F^N(x,t)$ è la proiezione di $F(x,t)$ su $N_{F(x,t)}\Sigma_t$. Ricordando che il moto per curvatura media soddisfa

$$\frac{d}{dt}d\mu_t = -|H|^2 d\mu_t$$

e utilizzando la proposizione 4.16 per avere

$$\frac{d}{dt}*\omega \geq \Delta_{\Sigma_t}*\omega + \delta|A|^2,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int(1-*\omega)\rho_{y_0,t_0}d\mu_t &\leq \int[\Delta_{\Sigma_t}(1-*\omega)-\delta|A|^2]\rho_{y_0,t_0}d\mu_t + \\ &-\int(1-*\omega)\Big[\Delta_{\Sigma_t}\rho_{y_0,t_0}+\rho_{y_0,t_0}\Big(\frac{|F^N|^2}{4(t-t_0)^2}+\frac{F^N\cdot H}{t-t_0}\Big)\Big]d\mu_t - \\ &-\int(1-*\omega)|H|^2\rho_{y_0,t_0}d\mu_t. \qquad (4.41)\end{aligned}$$

Tutti gli integrali sono fatti nello spazio-tempo rispetto alla misura $\mu_t = \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma_t$. Riordinando i termini il lato destro della disuguaglianza si riscrive come

$$\begin{aligned}&\int\big[\Delta_{\Sigma_t}(1-*\omega)\rho_{y_0,t_0}-(1-*\omega)\Delta_{\Sigma_t}\rho_{y_0,t_0}\big]d\mu_t - \delta\int|A|^2\rho_{y_0,t_0}d\mu_t + \\ &-\int(1-*\omega)\rho_{y_0,t_0}\Big[\frac{|F^N|^2}{4(t-t_0)^2}+\frac{F^N\cdot H}{t-t_0}+|H|^2\Big]d\mu_t. \qquad (4.42)\end{aligned}$$

Il primo termine si annulla integrando per parti e il terzo si completa ad un quadrato: (4.41) diventa

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int(1-*\omega)\rho_{y_0,t_0}d\mu_t \leq \\ &\leq -\delta\int|A|^2\rho_{y_0,t_0}d\mu_t - \int(1-*\omega)\rho_{y_0,t_0}\Big|\frac{|F^N|}{2(t_0-t)}+H\Big|^2 d\mu_t \qquad (4.43)\end{aligned}$$

Essendo $*\omega > 0$ e $\rho_{y_0,t_0} > 0$ è chiaro che

$$\int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_t \leq \int \rho_{y_0,t_0} d\mu_t;$$

essendo quest'ultimo integrale finito si ricava

$$\frac{d}{dt}\int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_t \leq C - \delta \int |A|^2 \rho_{y_0,t_0} d\mu_t$$

per una qualche costante $C > 0$

Per $\lambda > 1$ applichiamo una dilatazione parabolica D_λ in (y_0, t_0) come definita in (4.40). Se $\mathcal{M}$ è la traccia del flusso per curvatura media, studiamo ora $\mathcal{M}^\lambda := D_\lambda(\mathcal{M})$; indichiamo il nuovo parametro temporale con s, in modo che $t = t_0 - \frac{s}{\lambda^2}$, e la forma volume indotta dopo il blow up sarà $d\mu_s^\lambda$: è la forma volume sulla superficie

$$\Sigma_s^\lambda = F_s^\lambda(\overline{\Omega}) := \lambda F_{t_0 + \frac{s}{\lambda^2}}(\overline{\Omega}).$$

Con un cambio di variabili

$$\frac{d}{ds}\int (1 - *\omega)\rho_{0,0} d\mu_s^\lambda = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d}{dt}\int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_t \leq \frac{C}{\lambda^2} - \frac{\delta}{\lambda^2}\int \rho_{y_0,t_0}|A|^2 d\mu_t.$$

Si osservi che che $*\omega$ è invariante per il blow up parabolico (che è un omotetia nelle variabili spaziali e quindi non altera i differenziali). Utilizzando il fatto che la seconda forma fondamentale A riscala come $\frac{1}{\lambda}$ (perché è ottenuta con le derivate seconde) e il fatto che $\rho_{y_0,t_0} d\mu_t$ è invariante per il blow up parabolico, si ottiene

$$\frac{1}{\lambda^2}\int \rho_{y_0,t_0}|A|^2 d\mu_t = \int \rho_{0,0}|A|^2 d\mu_s^\lambda.$$

Quindi

$$\frac{d}{ds}\int (1 - *\omega)\rho_{0,0} d\mu_s^\lambda \leq \frac{C}{\lambda^2} - \delta\int \rho_{0,0}|A|^2 d\mu_s^\lambda.$$

Integrando rispetto a s da $-1 - \tau$ a -1 per qualche $\tau > 0$ si ottiene

$$\delta \int_{-1-\tau}^{-1}\int \rho_{0,0}|A|^2 d\mu_s^\lambda ds \leq$$
$$\leq \int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_{-1}^\lambda - \int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_{-1-\tau}^\lambda + \frac{C}{\lambda^2}. \quad (4.44)$$

Osserviamo che

$$\int (1 - *\omega)\rho_{0,0} d\mu_s^\lambda = \int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_{t_0 + \frac{s}{\lambda^2}}$$

e usiamo il fatto che $\lim_{t \to t_0^-} \int (1 - *\omega)\rho_{y_0,t_0} d\mu_t$ esiste per concludere che il lato destro di (4.44) va a zero per $\lambda \to +\infty$. Per ogni $\tau > 0$ possiamo dunque scegliere una successione $\lambda_j \to +\infty$ tale che

$$\int_{-1-\tau}^{-1} \int \rho_{0,0} |A|^2 d\mu_s^{\lambda_j} \leq C(j)$$

con $C(j) \to 0$. Ma τ è arbitrario e, a meno di scegliere i $C(j)$ più piccoli possiamo trovare una successione τ_j tale che $\frac{C(j)}{\tau_j} \to 0$ ed una successione $s_j \in [-1 - \tau_j, 1]$ tale che

$$\int_{-1-\tau}^{-1} \int \rho_{0,0} |A|^2 d\mu_{s_j}^{\lambda_j} \leq \frac{C(j)}{\tau_j}. \tag{4.45}$$

Per studiare (4.45) notiamo che

$$\rho_{0,0}(F_{s_j}^{\lambda_j})(F_{s_j}^{\lambda_j}) = \frac{1}{4\pi(-s_j)} \exp\Big(\frac{-|F_{s_j}^{\lambda_j}|^2}{4(-s_j)}\Big),$$

dove $F_{s_j}^{\lambda_j} = \lambda_j F_{t_0 + \frac{s_j}{\lambda_j^2}}$.

Se consideriamo, per ogni $R > 0$, la palla $B_R(0) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e, per j abbastanza grande, assumiamo $-1 < s_j < -\frac{1}{2}$, allora

$$\int \rho_{0,0} |A|^2 d\mu_{s_j}^{\lambda_j} \geq \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-R^2}{2}} \int_{\Sigma_{s_j}^{\lambda_j} \cap B_R(0)} |A|^2 d\mu_{s_j}^{\lambda_j}.$$

Da ciò segue che per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ si ha

$$\int_{\Sigma_{s_j}^{\lambda_j} \cap K} |A|^2 d\mu_{s_j}^{\lambda_j} \to 0, \quad j \to +\infty. \tag{4.46}$$

Nel resto di questo passo vogliamo provare che (4.46) e il fatto che $*\omega$ è limitato dal basso (stime a priori del gradiente) implicano

$$\lim_{j \to +\infty} \int \rho_{y_0,t_0} d\mu_{t_0 + \frac{s_j}{\lambda_j^2}} = \lim_{j \to +\infty} \int \rho_{0,0} d\mu_{s_j}^{\lambda_j} \leq 1. \tag{4.47}$$

Assumiamo che l'origine sia un punto limite per $\Sigma_{s_j}^{\lambda_j}$, altrimenti non c'è nulla da provare. Grazie alle stime a priori del gradiente, ciascuna Σ_t è grafico di una funzione u_t con gradiente equilimitato in t. Sia ora

$$u_j := u_{t_0 + \frac{s_j}{\lambda_j^2}}$$

e facciamo un blow up ellittico (vedi proposizione 5.1) del grafico di u_j di parametro λ_j. La superficie che otteniamo è il grafico di una funzione che indichiamo

$$\widetilde{u}_j : \lambda_j \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m.$$

Naturalmente, anche $|D\widetilde{u}_j|$ è equilimitato e abbiamo ipotizzato che

$$\lim_{j\to+\infty}\widetilde{u}_j(0)=0.$$

L'ipotesi sui gradienti e il corollario 2.10 al teorema di Ascoli-Arzelà dicono che possiamo assumere $\widetilde{u}_j\to\widetilde{u}_\infty$ in $C^{0,\alpha}$ sui compatti per un qualche $0<\alpha<1$, con $u_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ grafico Lipschitziano. Si può provare, come in [19] la seguente disuguaglianza:

$$|A_j|\le|\nabla^{\Sigma^{\lambda_j}_{s_j}}d\widetilde{u}_j|\le(1+|D\widetilde{u}_j|^2)^{\frac{3}{2}}|A_j|,$$

essendo A_j la seconda forma fondamentale su $\Sigma^{\lambda_j}_{s_j}$.

Ne segue che

$$\widetilde{u}_j\to\widetilde{u}_\infty,\quad \text{in } C^{0,\alpha}_{\text{loc}}\cap W^{1,2}_{\text{loc}}$$

e le derivate seconde di $\widetilde{u}_\infty$ sono nulle. Allora $\Sigma^{\lambda_j}_{s_j}\to\Sigma^\infty_{-1}$ nel senso delle misure di Radon in $\mathbb{R}^{n+m}$ e, inoltre, Σ^∞_{-1} è il grafico di un'applicazione affine. Quindi

$$\lim_{j\to+\infty}\int\rho_{0,0}d\mu^{\lambda_j}_{s_j}=\int\rho_{0,0}d\mu^\infty_{-1}=1,$$

che implica

$$\lim_{j\to+\infty}\int\rho_{y_0,t_0}d\mu_{t_0+\frac{s_j}{\lambda_j^2}}=\lim_{j\to+\infty}\int\rho_{y_0,t_0}d\mu_t=1.$$

A questo punto il teorema di White, teorema 4.19, dà le stime locali nello spazio $C^{2,\alpha}_{\text{loc}}$ parabolico. Queste, per il teorema di Ascoli-Arzelà implica la convergenza di sottosuccessioni con la derivara temporale e le derivate spaziali. D'altronde il limite di queste sottosuccessioni è unico e se ne conclude che $u_t\xrightarrow{C^2}u_{t_0}$ e u risolve il sistema del moto per curvatura media (4.8) anche in t_0.

4. L'insieme dei tempi per cui la soluzione esiste è aperto: sia $t_0>0$ tale che la soluzione esiste fino a t_0 nel senso che le derivate prime temporali e le derivate di ordine minore o uguale a 2 spaziali hanno limite per $t\to t_0^-$. Allora al limite $u(t_0,\cdot)$ si riapplica il teorema di esistenza per tempi piccoli si ha una soluzione in $C^{2,\alpha}_{(\delta)}(\Omega_{t_0+\varepsilon})$ che è soluzione anche al tempo t_0 (ovvero la soluzione prima di t_0 si incolla bene con la soluzione in $(t_0,t_0+\varepsilon)$).

Mettendo insieme il punto 3 e il punto 4 si conclude che la soluzione esiste per tutti i tempi. □

4.9 Convergenza del flusso per curvatura media

L'evoluzione per curvatura media diminuisce l'area: sia $H_t=\Delta F_t$ il vettore curvatura media, dove F_t è l'immersione di Ω in $\mathbb{R}^{n+m}$ data dal grafico di

$u(-,t)$. Allora da (4.10) usata con F al posto di $\widetilde{F}$ è immediato ottenere

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(\mathcal{G}_{u_t}) = -\int_{\mathcal{G}_{u_t}} H_t \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = -\int_\Omega |H_t|^2 \sqrt{g_t}dx,$$

dove si è usato il fatto che

$$\left(0,\ldots,0,g^{ij}(Du)u_{ij}\right)^N = \Delta_\Sigma F = H.$$

La variazione dell'area in tempo finito si ottiene integrando rispetto al tempo:

$$\int_0^{t_0}\int_\Omega |H_t|^2 \sqrt{g_t}dxdt = A(0) - A(t_0) \leq A(0),$$

cioè l'integrale a sinistra è finito, da cui segue che esiste una successione di tempi $t_i \to \infty$ tale che

$$\int_\Omega |H_{t_i}|^2 \sqrt{g_{t_i}}dx \to 0. \tag{4.48}$$

Teorema 4.22 *Sia data una successione di applicazioni Lipschitziane equi-limitate $u_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tali che $|Du_j| \leq 1-\delta$, per qualche $\delta > 0$. Supponiamo che le variazioni prime, definite in* (A.13), *soddisfino $\left\| \delta\mathcal{G}_{u_j} \right\| \to 0$. Allora esiste una sottosuccessione $u_{j'}$ convergente uniformemente e nel senso dei varifold ad una funzione Lipschitziana u con $|Du| \leq 1-\delta$ il cui grafico è minimo nel senso dei varifold. Inoltre*

$$\mathbf{v}(\mathcal{G}_{u_{j'}},1) \to \mathbf{v}(\mathcal{G}_u,1)$$

nel senso dei varifold.

Per le nozioni elementari della teoria dei varifold, si veda l'appendice.

Dimostrazione

1. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione $u_{j'} \to u$ uniformemente. Vogliamo provare che la convergenza è anche nel senso dei varifold.

Per il teorema di compattezza di Allard, teorema A.22, esiste una sottosuccessione $u_{j''}$ tale che $U_{j''} \to V$ nel senso dei varifold, dove $V = \mathbf{v}(\Sigma,\theta)$ è un varifold rettificabile intero, mentre $U_{j''} = \mathbf{v}(\mathcal{G}_{u_{j''}},1)$ è il grafico di $u_{j''}$ visto come varifold rettificabile intero. Abbiamo finito se proviamo che V è il varifold indotto dal grafico di u, i.e. $\Sigma = \mathcal{G}_u$ e $\theta = 1$ a meno di insiemi $\mathcal{H}^n$-nulli. In tal caso tutta la successione $U_{n'}$ convergerebbe a V nel senso dei varifold.

2. Proviamo che $V = \mathbf{v}(\mathcal{G}_u,1)$. Certamente $\operatorname{spt} U \subset \mathcal{G}_u$: sia infatti A un aperto che non interseca il grafico di u. Quest'ultimo è chiuso, quindi per ogni funzione continua f a supporto compatto in A, si ha $\operatorname{dist}(\operatorname{spt} f, \mathcal{G}_u) =$

$\varepsilon > 0$. Poichè la convergenza è uniforme, possiamo scegliere j_0 tale che per $j \geq j_0$ valga $\|u_j(x) - u(x)\|_\infty < \varepsilon$, per cui

$$\int_{\mathcal{G}_u} f(x) d\mathcal{H}^n(x) \to 0.$$

Allora $V(f) = 0$ per ogni f supportata in A e per l'arbitrarietà della scelta di A il supporto di V è contenuto in $\mathcal{G}_u$.

Dimostriamo che per $\mathcal{H}^n$-quasi ogni $p \in \mathcal{G}_u$ vale $\theta(p) = 1$. $U_{j''} \to V$ nel senso dei varifold implica che

$$\pi_\# U_{j''} \to \pi_\# V \tag{4.49}$$

nel senso dei varifold, dove $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ è la proiezione ortogonale su $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Per provare (4.49) si usa (A.11):

$$\begin{aligned} &\pi_\# U_{j''}(f) = \\ &= \int_{G_n} f(\pi(x), d\pi_x S) J\pi(x,S) dU_{j''} \to = \int_{G_n} f(\pi(x), d\pi_x S) J\pi(x,S) dV_{j''} = \\ &= \pi_\# V(f), \end{aligned} \tag{4.50}$$

$G_n = G_n(\Omega \times \mathbb{R}^m)$ è il fibrato Grassmanniano su $\Omega \times \mathbb{R}^m$, come definito in A.18.

La (4.49) si riscrive come

$$\mathcal{H}^n \llcorner \Omega \times \{0\} \to \theta \mathcal{H}^n \llcorner \Omega \times \{0\},$$

da cui segue immediatamente che $\theta = 1$.

3. V è minimo perché dato un campo vettoriale

$$X \in C^1_0(\Omega \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{n+m})$$

si ha

$$|U_i(\operatorname{div} X)| = \left| \int_{\mathcal{G}_{u_i}} X \cdot H_i \right| \leq \sup |X| \, \|\delta U_i\| \to 0.$$

E dalla convergenza dei varifold, si ottiene

$$U_i(\operatorname{div} X) \to V(\operatorname{div} X) = 0,$$

per cui il grafico limite è minimo nel senso dei varifold. □

Osservazione La stessa dimostrazione si applica a grafici definiti su tutto $\mathbb{R}^{n+m}$ e a successioni di grafici definite su insiemi che invadono $\mathbb{R}^{n+m}$ come nel caso del blow up, proposizione 5.1 e successive. •

Capitolo 5

Regolarità in codimensione arbitraria

Per studiare la regolarità dei grafici minimi utilizzeremo una procedura di blow-up; sappiamo che il blow-up del grafico di una funzione regolare converge ad un piano. Il teorema di Allard dice che, nel caso di grafici minimi, il viceversa è vero: se il blow-up in un punto p di un grafico minimo è un piano, allora il grafico è regolare in un intorno di p. Abbiamo ricondotto, quindi, il problema della regolarità a quello della classificazione degli oggetti ottenuti attraverso il blow-up di grafici minimi. Poiché tali oggetti sono certamente grafici minimi interi, il risultato di cui abbiamo bisogno è un teorema di tipo Bernstein: grafici minimi interi sono piani.

5.1 Blow up e blow down: coni minimi

Proposizione 5.1 (Blow up) *Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana, $|Du| \leq K$, con $\mathcal{G}_u$ minimo nel senso dei varifold. Sia u_λ definito da*

$$u_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(u(\lambda x) - u(x_0)), \quad x_0 \in \Omega.$$

Allora esiste una successione $\lambda(i) \to 0$ tale che $u_{\lambda(i)} \to v$ uniformemente sui compatti e nel senso dei varifold, dove il grafico di $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un cono minimo nel senso dei varifold.

Dimostrazione La convergenza ad un grafico Lipschitziano minimo di una successione $u_{\lambda(i)}$ è immediata conseguenza della proposizione 4.22. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $x_0 = 0$ e $u(0) = 0$.

Dimostriamo che $v(\tau x) = \tau v(x)$ per ogni $\tau > 0$.

$$\left| v(x) - \tau v\left(\frac{x}{\tau}\right) \right| \leq \left| v(x) - \tau u_\lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) \right| + \left| \tau u_\lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) - \tau v\left(\frac{x}{\tau}\right) \right| = \quad (5.1)$$

$$= |v(x) - u_{\tau\lambda}(x)| + \tau \left| u_\lambda\left(\frac{x}{\tau}\right) - v\left(\frac{x}{\tau}\right) \right|. \quad (5.2)$$

Grazie alla convergenza di u_λ, gli ultimi due termini vanno a zero, per cui $v(\tau x) = \tau v(x)$. $\square$

Proposizione 5.2 (Blow up di un cono) *Sia* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un cono*[1] *Lipschitziano, minimo nel senso dei varifold, con* $|Du| \le K$*. Sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e definiamo*

$$u_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(u(x_0 + \lambda x) - u(x_0)).$$

Allora esiste una successione $\lambda(i) \to 0$ *tale che* $u_{\lambda(i)} \to v$*, uniformemente sui compatti e nel senso dei varifold, dove* $\mathcal{G}_v$ *è un cono minimo nel senso dei varifold. Inoltre* $\mathcal{G}_v$ *è il un prodotto della forma* $\mathbb{R} \times C$*, con* C *cono minimo di dimensione* $n-1$ *in* $\mathbb{R}^{n+m-1}$*.*

Sia $\widetilde{x} = (x_2, \ldots, x_n)$. L'ultima affermazione vuol dire che esistono un sistema ortonormale di coordinate in $\mathbb{R}^n$, una funzione $\widetilde{v} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tali che

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sigma x_1 + \widetilde{v}(\widetilde{x}) \tag{5.3}$$

e $\mathcal{G}_{\widetilde{v}}$ è un cono minimo.

Dimostrazione Possiamo applicare la proposizione 5.1 a u e ottenere un'applicazione Lipschitziana v, limite uniforme di u_λ, con $\mathcal{G}_v$ varifold minimo. Vogliamo dimostrare che

$$v(x + \tau x_0) = v(x) + \tau v(x_0) = v(x) + \tau u(x_0), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Usando la convergenza di u_λ a v abbiamo

$$\begin{aligned} v(x + \tau x_0) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{u(x_0 + \lambda(x + \tau x_0)) - u(x_0)}{\lambda} &= \\ = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{u((1 + \lambda\tau)x_0 + \lambda x) - u(x_0)}{\lambda} &= \\ = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(1 + \lambda\tau)u(x_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda\tau}x) - (1 + \lambda\tau)u(x_0) + \lambda\tau u(x_0)}{\lambda} & \\ = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(u(x_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda\tau}x) - u(x_0))}{\frac{\lambda}{(1+\lambda\tau)}} + \tau u(x_0) = v(x) + \tau u(x_0). & \end{aligned} \tag{5.4}$$

Si noti che si è utilizzato il fatto che per $|\lambda\tau| < 1$ si ha $1 + \lambda\tau > 0$ e dunque $u((1 + \lambda\tau)x_0 + \lambda x) = (1 + \lambda\tau)u(x_0 + \frac{\lambda}{1+\lambda\tau}x)$ perché $\mathcal{G}_u$ è un cono. Scegliendo una base di $\mathbb{R}^n$ del tipo $\left\{\frac{x_0}{|x_0|}, v_2, \ldots, v_n\right\}$, dove $v_2, \ldots, v_n$ è un completamento di $\frac{x}{|x_0|}$ ad una base ortonormale, è chiaro che v soddisfa (5.3).

[1] un cono $C \subset \mathbb{R}^{n+m}$ con vertice nell'origine è un insieme tale che per ogni $\lambda > 0$ valga $\lambda C = C$.

Per vedere che il grafico di $\widetilde{v} := v\big|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}$ è minimo si consideri un campo vettoriale $\widetilde{X}(\widetilde{x}, y_1, \dots, y_m)$ in $C^1_0(\mathbb{R}^{n-1+m}; \mathbb{R}^{n-1+m})$ ed una funzione $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ a supporto compatto e non identicamente nulla. Sia

$$X(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1)\widetilde{X}(\widetilde{x}).$$

Poiché $\mathcal{G}_v$ è minimo e grazie al teorema di Fubini-Tonelli abbiamo

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\mathcal{G}_u} \operatorname{div} X = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} X(x)\sqrt{g_u(x)}dx = \\
= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\rho(x_1)dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{X}(\widetilde{x})\sqrt{g_u(\widetilde{x})}d\widetilde{x} + \\
+ \int_{\mathbb{R}} \rho(x_1)dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{\operatorname{div}}\widetilde{X}(\widetilde{x})d(\widetilde{x}) = c\int_{\mathcal{G}_{\widetilde{v}}} \widetilde{\operatorname{div}}\widetilde{X}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1)dx_1 = 0$ perché ρ è a supporto compatto; si è anche usato che $\sqrt{g_u}$ dipende solo da $\widetilde{x}$ grazie a (5.3). Si è indicato con $\widetilde{\operatorname{div}}$ l'operatore divergenza su $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m$ e, infine, $c = \int_{\mathbb{R}} \rho(x_1)dx_1$. □

Proposizione 5.3 (Blow down) *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitziana, $|Du| \leq K$, con $\mathcal{G}_u$ minimo nel senso dei varifold. Sia u_λ definito da*

$$u_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}u(\lambda x).$$

Allora esiste una successione $\lambda(i) \to \infty$ tale che $u_{\lambda(i)} \to v$ uniformemente sui compatti e nel senso dei varifold, dove il grafico di v è un cono minimo nel senso dei varifold.

Dimostrazione Come la proposizione 5.1, con $\lambda \to \infty$ anziché $\lambda \to 0$. □

5.2 Un teorema di tipo Bernstein

Si è soliti chiamare teorema di Bernstein un teorema di rigidità che, sotto opportune ipotesi, dice che un grafico intero minimo dev'essere un piano (un sottospazio affine di dimensione n). L'enunciato originale è

Teorema 5.4 *Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che soddisfi l'equazione delle superfici minime. Allora u è affine, i.e. $u(x, y) = y_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 y$, con $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$.*

Esso risale ad una memoria di Bernstein pubblicata nel 1927, ma ne esistono varie dimostrazioni alternative e generalizzazioni. De Giorgi [6] dimostra che il teorema di Bernstein vale anche per grafici 3 dimensionali in $\mathbb{R}^4$, mentre Simons in [38] prova il teorema di Bernstein in $\mathbb{R}^{n+1}$ per $n \leq 7$. Questo risultato è preciso per quanto riguarda la dimensione perché in [3] Bombieri, De Giorgi e Giusti mostrano che esiste una funzione $u : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ non affine il cui grafico è minimo.

Precedentemente Moser aveva provato in [32] che un grafico minimo di una funzione scalare di gradiente limitato è un sottospazio affine.

In codimensione maggiore, Lawson e Osserman [25] hanno mostrato che il cono costruito sulla mappa di Hopf (3.9) è minimo, teorema 3.5. Inoltre è chiaro che la tale cono è il grafico di una funzione di gradiente limitato; questo in contrasto con in risultato di Moser in codimensione 1.

I primi teoremi di tipo Bernstein in codimensione arbitraria vengono provati in [16] da Hildebrandt, Jost e Widman attraverso lo studio della mappa di Gauss di un grafico minimo. Con un approccio simile, Jost e Y. L. Xin in [21] migliorano il risultato di [16], ottenendo il seguente teorema.

Teorema 5.5 *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ che soddisfi il sistema delle superfici minime* (1.19). *Sia $*\omega = (\det(I + Du^*Du))^{-\frac{1}{2}}$ e sia $\beta_0 > 0$ tale che*

$$\beta_0 < \begin{cases} 2 & \text{se } m \geq 2 \\ \infty & \text{se } m = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Allora, se $*\omega \geq \frac{1}{\beta_0}$, u è affine.

Confrontando questo teorema con il risultato di Moser, si osserva che l'ipotesi $*\omega \geq \frac{1}{\beta_0}$ implica $Du \leq \beta_0^2 - 1$, mentre in codimensione 1, benché si richieda che il gradiente di u sia limitato, non si impone quale costante debba maggiorarlo. Il teorema che dimostriamo di seguito, dovuto a Mu-Tao Wang [42], implica il risultato di Moser per la codimensione 1 e, come mostreremo, il risultato di Jost e Xin per la codimensione arbitraria. Esso è un'estensione naturale del teorema di Moser perché richiede solamente che $|Du|$ sia limitato e area-decreasing. Quest'ultima ipotesi è sempre vera in codimensione 1, quindi le ipotesi del teorema di Wang in codimensione 1 sono le stesse del teorema di Moser.

Teorema 5.6 *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione C^2 e* area-decreasing *che soddisfa il sistema delle superfici minime* (4.7). *Supponiamo che $|Du| \leq K$ per qualche $K > 0$. Allora u è lineare.*

Dimostrazione Sia $\delta > 0$ tale che $\lambda_i\lambda_j \leq 1 - \delta$ per $i \neq j$, dove i λ_i sono i valori singolari di Du.

1. Denotiamo con Δ_Σ il Laplaciano su $\Sigma = \mathcal{G}_u$, rispetto alle coordinate della parametrizzazione $x \to (x, u(x))$.

$$\Delta_\Sigma(\ln *\omega) = \frac{*\omega\Delta_\Sigma * \omega - \left|\nabla^\Sigma * \omega\right|^2}{|*\omega|^2}. \tag{5.7}$$

La derivata covariante di $*\omega$ si calcola applicando la decomposizione in valori singolari di Du e l'equazione (4.30) a (4.24):

$$(*\omega)_k = - * \omega(\sum_{i,\alpha} \lambda_{\alpha i} h^\alpha_{ik}) = - * \omega(\sum_i \lambda_i h^i_{ik}). \tag{5.8}$$

L'equazione (4.32) può essere riscritta come

$$\Delta_\Sigma * \omega = - * \omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2 + 2\sum_{\substack{i,j,k\\ i<j}}(-\lambda_j\lambda_i h^i_{ik}h^j_{jk} + \lambda_j\lambda_i h^i_{jk}h^j_{ik})\Big). \tag{5.9}$$

Questo si vede facilmente scambiando i e j e invertendo α e β quando si somma su questi indici. Inserendo (5.9) e (5.8) in (5.7) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\Delta_\Sigma(-\ln *\omega) = \\
&= *\omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2 + 2\sum_{\substack{i,j,k\\ i<j}}\lambda_j\lambda_i h^i_{jk}h^j_{ik} - 2\sum_{\substack{i,j,k\\ i<j}}\lambda_j\lambda_i h^i_{ik}h^j_{jk} + \sum_k\Big(\sum_i \lambda_i h^i_{ik}\Big)^2\Big) = \\
&= *\omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2 + \sum_{i,k}\lambda_i^2(h^i_{ik})^2 + 2\sum_{\substack{k,i,j\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{jk}h^j_{ik}\Big) \leq \\
&\geq *\omega\Big(\sum_{\alpha,i,k}(h^\alpha_{ik})^2 + 2\sum_{\substack{k,i,j\\ i\neq j}}\lambda_i\lambda_j h^i_{jk}h^j_{ik}\Big) \geq *\omega\Big(|A|^2 - (1-\delta)|A|^2\Big) \geq \delta|A|^2 *\omega.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Si osservi che per dimostrare che $-\ln *\omega$ è una funzione subarmonica, abbiamo utilizzato solamente la condizione $|\lambda_i\lambda_j| \leq 1$: abbiamo quindi provato che $-\ln *\omega$ è una funzione subarmonica sui grafici area-decreasing.

L'ipotesi che $|Du|$ sia limitato implica che $*\omega \geq K_1 > 0$ per un certo K_1, da cui $\ln(*\omega)$ è limitato dal basso da $\ln K_1$.

2. Applichiamo un blow down al grafico di u, e per la proposizione 5.3 abbiamo una successione equilipschitziana

$$u_{\lambda(j)}(x) = \frac{1}{\lambda(j)}u(\lambda(j)x)$$

che converge uniformemente ad una funzione Lipschitziana $\overline{u}$ per cui valgono ancora le stesse condizioni sul massimo e sui valori singolari del differenziale. In particolare $\overline{u}$ è area-decreasing. Inoltre la convergenza è anche nel senso dei varifold e $\mathcal{G}_{\overline{u}}$ è un cono minimo nel senso dei varifold con vertice nell'origine. Il differenziale di $\overline{u}$ è positivamente omogeneo, ovvero

$$D\overline{u}(tx) = D\overline{u}(x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Si osservi che il cono non è necessariamente regolare nell'origine, ma supporremo che lo sia in tutti gli altri punti. Il caso generale è affrontato nel passo 3. L'omogeneità di $D\overline{u}$ implica che su qualunque corona circolare centrata nell'origine $*\omega$ assume un minimo interno; d'altronde il principio di massimo si applica a (5.9) e ne segue che $|A| = 0$ su ogni corona circolare e quindi su $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. L'annullamento della seconda forma fondamentale implica che il cono è è un sottospazio, i.e. $\overline{u}$ è lineare. Dimostriamo ora che $Du(x) = D\overline{u}(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e quindi u è lineare. Siano δ e γ come nel teorema di Allard, teorema B.2, j_0 e ρ tali che per ogni $j \geq j_0$

$$\frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_{u_j}(B(x_0, \rho))}{\rho^n \omega_n} \leq 1 + \delta,$$

dove questo è possibile perché dalla convergenza dei varifold abbiamo

$$\frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_{u_j}(B(x_0, \rho))}{\rho^n \omega_n} \to \frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_{\overline{u}}(B(x_0, \rho))}{\rho^n \omega_n} = 1.$$

Allora le $u_j \in C^{1,\alpha}(\overline{B}^n_{\gamma\rho}(0))$ e sono equilimitate in $C^{1,\alpha}(\overline{B}^n_{\gamma\rho}(0))$, grazie a (B.3), dove $B^n_r(x)$ è la palla in $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio r. Per il teorema di Ascoli-Arzelà una sottosuccessione, ancora indicata u_j, converge C^1 in $B(0, \gamma\rho)$ all'applicazione lineare $\overline{u}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha che definitivamente $\frac{x}{\lambda(j)} \in B(0, \gamma\rho)$ e

$$\left| Du_j \left(\frac{x}{\lambda(j)} \right) - D\overline{u} \left(\frac{x}{\lambda(j)} \right) \right| < \varepsilon.$$

Mandando ε a 0 e osservando che $Du_j \left(\frac{x}{\lambda(j)} \right) = Du(x)$ otteniamo che il differenziale di u è costante e, dal teorema del valor medio di Lagrange si deduce che u è lineare.

3. Se il blow down genera un cono con almeno una singolarità $x_0 \neq 0$, possiamo applicare un blow up in x_0 e, per la proposizione 5.2 otteniamo un cono minimo di dimensione $n-1$ in $\mathbb{R}^{n+m-1}$. Se tale cono è C^2 tranne che nell'origine, possiamo applicare il punto 2 per dimostrare che la singolarità che l'aveva originato non esiste, assurdo. Altrimenti continuiamo induttivamente con blow up, finché non otteniamo un cono con singolarità al più nell'origine. Tale cono deve esistere perché i coni di dimensione 1 (unione di due semirette) non hanno singolarità al di fuori dell'origine. Grazie al passo 2 otteniamo un assurdo. □

Osservazione Questo teorema implica il teorema 5.5 perché l'ipotesi (5.6) può essere letta come

$$1+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4+2\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i^2\lambda_j^2\le\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^2)=\frac{1}{*\omega^2}\le 4-\delta,\quad \delta>0.$$

Se per ogni $1\le i\le n$ accade che $\lambda_i^4<1-\frac{\delta}{2}$, certamente $\lambda_i\lambda_j\le 1-\varepsilon$ per qualche ε e, dunque, u è area-decreasing. Se per qualche indice i vale $\lambda_i^4\ge\frac{\delta}{2}$ si ottiene la stima

$$\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i^2\lambda_j^2\le 1-\varepsilon$$

per qualche ε, da cui la condizione area-decreasing. •

5.2.1 Commenti al teorema di Bernstein: la mappa di Gauss

La dimostrazione di Mu-Tao Wang del teorema 5.6 si basa sulla disuguaglianza (5.10) che dice che $-\ln *\omega$ è una funzione *subarmonica* su Σ (rispetto alla metrica Riemanniana di Σ). Diamo una spiegazione di questo fatto.

Definizione 5.7 (La mappa di Gauss) *Data una sottovarietà di dimensione n $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+m}$, la mappa di Gauss*

$$\gamma:\Sigma\to G(n,m)$$

è l'applicazione che associa ad ogni $x\in\Sigma$ lo spazio tangente $T_x\Sigma$, visto come elemento della Grassmanniana degli n-piani in $\mathbb{R}^{n+m}$.

La struttura differenziale e, in particolar modo, la struttura Riemanniana di $G(n,m)$ sono studiate da Yung-Chow Wong in [46] e da Jost e Xin in [21]. Il teorema fondamentale riguardante la mappa di Gauss delle superfici minime è dovuto a Ruh e Vilms [36]:

Teorema 5.8 *La mappa di Gauss γ di una sottovarietà $\Sigma\subset\mathbb{R}^{n+m}$ è armonica se e solo se la curvatura media H di Σ è parallela, i.e.*

$$\nabla^\Sigma H=0.$$

In particolare, se Σ è minima, i.e. $H=0$, la sua mappa di Gauss è armonica. Jost e Xin osservano che la condizione $*\Omega\ge\frac{1}{\beta_0}$, individua una regione della Grasmanniana su cui

$$f(L):=\ln\sqrt{\det(I+L^*L)}\tag{5.11}$$

è convessa[2] (in (5.11) si identifica un piano con l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di cui è grafico; considereremo solo la regione della Grassmanniana costituita da tali piani). In [43], Mu-Tao Wang dimostra che f è convessa su una regione della Grassmanniana più ampia: i grafici di applicazioni lineari area-decreasing. Quindi $*\omega = f \circ \gamma$ è subarmonica perché composizione di un'applicazione armonica e una funzione convessa.

È facile osservare che una ulteriore estensione di tale regione della Grasmanniana, porterebbe un'immediata estensione del teorema 5.6 e del teorema di regolarità che ne segue: il teorema 5.9.

5.3 Regolarità dei grafici minimi area-decreasing

Il seguente teorema di regolarità, dovuto a Mu-Tao Wang [39], è conseguenza del teorema di regolarità di Allard e del teorema di Bernstein 5.6. Le ipotesi sono analoghe a quelle di codimensione 1, poiché in tal caso tutte le funzioni sono area-decreasing. È anche opportuno osservare che, a causa del controesempio di Lawson e Osserman, teorema 3.5, un'ipotesi su Du è naturale.

Teorema 5.9 *Sia data $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione Lipschitziana che soddisfi il sistema delle superfici minime* (1.19) *e supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che*

$$\lambda_i \lambda_j \leq 1 - \varepsilon, \quad i \neq j,$$

dove i λ_i sono i valori singolari di Du. Allora $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione

1. Sia $x_0 \in \Omega$. A meno di traslazioni, possiamo supporre $x_0 = 0$ e $u(0) = 0$. Applicando un blow-up in 0, vedi proposizione 5.1, otteniamo $u_i := u_{\lambda(i)} \to v$ uniformemente e nel senso dei varifold, dove $\mathcal{G}_v$ è un cono ed è minimo nel senso dei varifold. Inoltre la convergenza uniforme conserva la proprietà area-decreasing e il sup delle derivate.

Se v è C^2 tranne al più in 0, allora v è affine per il teorema 5.6. In particolare $\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_v(B_1(0)) = \omega_n$, dove $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1^n(0))$. Dalla convergenza dei varifold (la convergenza uniforme non sarebbe sufficiente) abbiamo

$$\frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_u(B_\lambda(0))}{\omega_n \lambda^n} = \frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_{u_\lambda}(B_1(0))}{\omega_n} \to \frac{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{G}_v(B_1(0))}{\omega_n} = 1$$

[2]convessa in questo caso vuol dire che, data una geodetica $\gamma \to \Xi$, dove $\Xi \subset G(n,m)$ è il sottoinsieme della Grassmanniana costituito dai grafici area-decreasing, si ha che

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(- \ln \sqrt{\det(I + L^*L)} \circ \gamma \Big) \geq 0.$$

Questa nozione di convessità è diversa da quella utilizzata in codimensione 1 quando si dice che $\sqrt{1 + |Du|^2}$ è una funzione convessa: in questo caso, infatti, lo spazio delle matrici $1 \times n$ in cui vive Du è dotato della metrica piatta, ben distinta dalla metrica della Grassmanniana.

Siano δ e γ con nel teorema di Allard B.2; sia $V = \mathbf{v}(\mathcal{G}_u, 1)$ e $\rho > 0$ tale che $B_\rho(0) \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ e

$$\frac{\mu_V(B_\rho(0))}{\omega_n \rho^n} \leq 1 - \delta.$$

Si applica il teorema di regolarità di Allard, da cui $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_{\gamma\rho}(0))$.

2. Supponiamo ora che il cono minimo generato dal blow up al punto 1 non sia C^2 in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Come nella dimostrazione del teorema 5.6, supponiamo, per assurdo, che esista $x_0 \neq 0$ in cui il cono generato dal blow-up sia non regolare. Possiamo generare un cono in $(x_0, v(x_0))$ con un ulteriore blow-up. Grazie alla proposizione 5.2, tale cono si fattorizza e otteniamo un cono di dimensione $n-1$. Se esso è regolare tranne che al più nell'origine, applicando il passo precedente otteniamo che v è regolare in x_0, assurdo.

Allora, induttivamente, eseguiamo blow-up e troviamo coni con singolarità fin quando non arriviamo ad un cono di dimensione 1, unione di 2 semirette, che non può avere singolarità se non nell'origine.

3. La regolarità delle derivate di ordine superiore è conseguenza delle stime di Schauder ed è la parte facile del teorema che segue (la parte difficile è la dimostrazione del fatto che le soluzioni C^1 sono $C^{1,\alpha}$). □

Osservazione A causa del teorema di Allard B.3, le soluzioni u del problema di Dirichlet sono regolari fin sul bordo se Ω è strettamente convesso. •

Teorema 5.10 (Morrey [29]) *Le soluzioni $u \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ del sistema delle superfici minime in forma di divergenza* (1.19) *sono analitiche.*

Cenni della dimostrazione Non dimostreremo l'analiticità, per la quale si può consultare [30].

1. Il primo passo è un'applicazione del metodo dei rapporti incrementali per dimostrare che le soluzioni deboli $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ del sistema delle superfici minime (1.19) sono $W^{2,2}$.

2. Derivando il sistema delle superfici minime si ottiene che le derivate prime $D_s u$ soddisfano

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(A^{ij}_{\alpha\beta}(Du(x))\frac{\partial}{\partial x^j}(D_s u^\beta(x))\Big) = 0 \tag{5.12}$$

in senso debole, dove

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(p) := \frac{\partial^2 F}{\partial p^\alpha_i \partial p^\beta_j}(p),$$

$$F(p) := \sqrt{\det\big(I + p^* p\big)}, \forall p \in M^{m \times n}.$$

Vediamo p come una matrice $m \times n$. F è l'integando del funzionale area (1.21) ed è strettamente policonvesso[3]; le sue derivate seconde soddisfano la condizione di Legendre-Hadamard: per ogni $p \in M^{m\times n}$ esiste $\lambda > 0$ tale che

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(p)\xi_i\xi_j\eta^\alpha\eta^\beta \geq \lambda|\xi|^2|\eta|^2. \tag{5.13}$$

3. Per ipotesi $u \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, quindi $A^{ij}_{\alpha\beta}(Du)$ è continuo. D'ora in poi sia $v := D_s u$, $x_0 \in \Omega$, $0 < \rho < R < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ e $\overline{v}$ la soluzione debole di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big(A^{ij}_{\alpha\beta}(Du(x_0))\dfrac{\partial}{\partial x^j}(\overline{v}(x))\Big) = 0 & \text{in } B_R(x_0); \\ \overline{v} = v & \text{su } \partial B_R(x_0). \end{cases} \tag{5.14}$$

Tale soluzione esiste perché, essendo $A^{ij}_{\alpha\beta}(Du(x_0))$ costante, il sistema (5.14) è lineare. Le disuguaglianze classiche dell'energia per $\overline{v}$ sono

$$\int_{B_\rho}|D\overline{v}|^2 \leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\int_{B_R}|D\overline{v}|^2 \tag{5.15}$$

e, definendo la media di una funzione $f_{x_0,\rho} := \frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho(x_0)} f$,

$$\int_{B_\rho}|D\overline{v} - (D\overline{v})_{x_0,\rho}|^2 \leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2}\int_{B_R}|D\overline{v} - (D\overline{v})_{x_0,\rho}|^2 \tag{5.16}$$

Quindi $v = \overline{v} + (v - \overline{v})$ soddisfa

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho}|Dv|^2 \leq& \\ &\leq \int_{B_\rho}|D\overline{v}|^2 + \int_{B_\rho}|D\overline{v} - Dv|^2 \leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\int_{B_R}|D\overline{v}|^2 + \int_{B_\rho}|D\overline{v} - Dv|^2 \leq \\ &\leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\int_{B_R}|Dv|^2 + c_1\int_{B_R}|D\overline{v} - Dv|^2; \end{aligned} \tag{5.17}$$

[3] una funzione F definita su uno spazio di matrici $M^{m\times n}$ si dice policonvessa se esiste una funzione convessa $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(p) = g(\mathrm{Min}(p)), \quad \forall p \in M^{m\times n},$$

dove $\mathrm{Min} : M^{m\times n} \to \mathbb{R}^d$ è la funzione che associa ad ogni matrice l'insieme di tutti i suoi minori. Grazie alla formula di Cauchy-Binet [9], [11],

$$F(p) = \sqrt{\sum_k M_k^2},$$

essendo M_k^2 la somma dei quadrati dei minori $k \times k$. La policonvessità stretta (g è strettamente convessa) implica la condizione di Legendre-Hadamard.

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 \le\\
&\le \int_{B_\rho} |D\overline{v} - (D\overline{v})_{x_0,\rho}|^2 + \int_{B_\rho} |D(v-\overline{v}) - (D\overline{v} - v)_{x_0,\rho}|^2 \le\\
&\le c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R} |D\overline{v} - (D\overline{v})_{x_0,\rho}|^2 + \int_{B_\rho} |D\overline{v} - Dv|^2 \le\\
&\le c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 + c_1 \int_{B_\rho} |D\overline{v} - Dv|^2. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Mettendo insieme (5.12) e (5.14), omettendo gli indici i, j, α, β e abbreviando $A(Du(x)) = A(x)$ si ottiene

$$D\big(A(x_0)D(v-\overline{v})\big) = D\big([A(x_0) - A(x)]Dv\big)$$

Poiché $\overline{v} - v \in W_0^{1,2}(B_R)$ possiamo sceglierlo come funzione test nella precedente equazione; usando l'ellitticità (5.13) e integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |D(v-\overline{v})|^2 \le \int_{B_R} A(x_0)D(v-\overline{v})D(v-\overline{v}) \le\\
\le \int_{B_R} [A(x_0) - A(x)]Dv(x)D(v(x) - \overline{v}(x))dx. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Applicando $ab \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ con $a = |A(x) - A(x_0)||Dw|$ e $b = |D(v-\overline{v})|$ si ottiene

$$\int_{B_R} |D(v-\overline{v})|^2 \le c\omega(R)^2 \int_{B_R} |Dv|^2, \quad (5.20)$$

essendo c una costante assoluta e $\omega(R) := \sup_{B_R} |A(x) - A(x_0)|$.

La stima (5.20) inserita in (5.17) dà

$$\int_{B_\rho} |Dv|^2 \le c\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n + \omega(R)^2\Big] \int_{B_R} |Dv|^2;$$

scegliendo R in modo che $\omega(R) < \delta$ per un certo $\delta > 0$ ed applicando un lemma algebrico[4] si ottiene

$$\int_{B_\rho} |Dv|^2 \le c\rho^{n-\varepsilon}, \quad (5.21)$$

[4]**Lemma** Siano date una funzione positiva non decrescente Φ e costanti positive A, B, α, β con $\alpha > \beta$ e sia R_0 tale che

$$\Phi(\rho) \le A\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^\alpha + \delta\Big]\Phi(R) + BR^\beta, \quad 0 < \rho < R \le R_0;$$

allora per ε e δ sufficientemente piccoli vale

$$\Phi(\rho) \le c(\alpha, \beta, A, \varepsilon, \delta)\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{\alpha-\varepsilon}\Phi(R) + B\rho^\beta\Big], \quad 0 < \rho < R \le R_0.$$

essendo c una costante dipendente dall'oscillazione $\omega(R)$. La stima (5.21) al variare di x_0 in un aperto dice che $Dv \in L^{2,n-\varepsilon}_{\text{loc}}(\Omega)$.[5] Usando la disuguaglianza di Poincaré

$$\int_{B_\rho} |v - v_{x_0,\rho}|^2 \leq c\rho^2 \int_{B_\rho} |Dv|^2 \leq c\rho^{n+2-\varepsilon},$$

che, valida in un aperto, implica $v \in \mathcal{L}^{2,n+2-\varepsilon}_{\text{loc}}(\Omega) \cong C^{0,\sigma}(\Omega)$ per $\sigma = \frac{2-\varepsilon}{2}$, ovvero $u \in C^{1,\sigma}(\Omega)$.

4. Grazie al punto precedente $u \in C^{1,\sigma}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e di conseguenza $A^{ij}_{\alpha\beta} \in C^{0,\sigma}(\Omega)$. Si può, dunque, stimare il modulo di continuità di $A(x)$ avendo $\omega(R) \leq R^\alpha$. Inserendo (5.20) in (5.18) e applicando (5.21) abbiamo

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\rho} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 &\leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \int\limits_{B_R} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 + c\omega(R)^2 \int\limits_{B_R} |Dv|^2 \leq \\ &\leq c\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n+2} \int_{B_R} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 + R^{n+2\sigma-\varepsilon}. \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Applicando il lemma algebraico con $\beta = n + 2\sigma - \varepsilon$ si conclude

$$\int_{B_\rho} |Dv - (Dv)_{x_0,\rho}|^2 \leq c\rho^{n+2\sigma-\varepsilon},$$

quindi $Dv \in \mathcal{L}^{2,2+2\sigma-\varepsilon}_{\text{loc}}(\Omega) \cong C^{0,\sigma-\frac{\varepsilon}{2}}(\Omega)$; a questo punto sappiamo che Dv è localmente limitata e possiamo porre $\varepsilon = 0$ in (5.22), concludendo $Dv \in C^{0,\sigma}(\Omega)$, ovvero $u \in C^{2,\sigma}(\Omega)$.

5. Essendo $u \in C^{2,\sigma}(\Omega)$, il sistema delle superfici minime può essere scritto nella forma non variazionale

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(Du) D_{ij} u^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

[5] $L^{p,\lambda}$ e $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ sono gli spazi di Morrey e Campanato, rispettivamente.

$$L^{p,\lambda}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0<\rho<\operatorname{diam}\Omega}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{\Omega\cap B_\rho(x_0)} |u|^p dx < +\infty \Big\}$$

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ 0<\rho<\operatorname{diam}\Omega}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int\limits_{\Omega\cap B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^p dx < +\infty \Big\}$$

Utilizziamo il seguente teorema di Campanato [4]:

Teorema 5.11 *Sia $n < \lambda \leq n + p$; allora*

$$\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \cong C^{0,\sigma}(\Omega), \quad \sigma = \frac{\lambda - n}{p},$$

mentre per $\lambda > n + p$ lo spazio $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ contiene solo le funzioni costanti.

Poiché $g^{ij} \in C^{1,\sigma}(\Omega)$, è possibile derivare il sistema e ottenere, sempre per mezzo dei rapporti incrementali

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Du)D_{ij}(D_s u) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_s g^{ij}(Du)D_{ij}u =: h(Du). \tag{5.23}$$

Dalle stime di Schauder classiche non variazionali sappiamo che se $a^{ij}, f \in C^{k,\sigma}(\Omega)$, allora le soluzioni di

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)D_{ij}u(x) = f(x)$$

appartengono a $C^{k+2,\sigma}(\Omega)$.

Proviamo induttivamente che le soluzioni u del sistema delle superfici minime sono $C^{k,\sigma}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 1, 2$ si tratta del risultato dei punti 4 e 5. Supponiamo induttivamente $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Allora $g^{ij}(Du(x)), h(Du(x)) \in C^{k-1,\alpha}$ e per le stime di Schauder applicate a (5.23), $Du \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. L'induzione è provata e quindi $u \in C^{\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. $\square$

Appendice A

Geometria dei Varifold

A.1 Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{n+m}$ rettificabili

Molte delle definizioni e proposizioni del capitolo 1 possono essere applicate a particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{n+m}$ che non necessariamente godono di una struttura di sottovarietà C^1. Ciò di cui abbiamo bisogno è una classe di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^{n+m}$ sufficientemente generale da comprendere i grafici di funzioni Lipschitziane, ma contenente solamente oggetti sui quali sia possibile sviluppare le nozioni del calcolo differenziale.

La necessità di considerare oggetti più generali delle sottovarietà regolari può essere apprezzata nel teorema 4.22. La dimostrazione fa uso del teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà, che fornisce la convergenza uniforme di funzioni equicontinue ed equilimitate. Tuttavia, la convergenza uniforme di funzioni C^1 con gradiente equilimitato non è necessariamente una funzione C^1, ma è certamente una funzione Lipschitziana.

Queste considerazioni suggeriscono l'utilità della definizione di insieme *n-rettificabile.*

Definizione A.1 *Un sottoinsieme Boreliano $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ si dice numerabilmente n-rettificabile se*

$$M \subset N_0 \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \Big), \tag{A.1}$$

dove $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ e, per $j \geq 1$, N_j è una sottovarietà C^1 di $\mathbb{R}^{n+m}$ di dimensione n.

La connessione tra insiemi rettificabili ed applicazioni Lipschitziane è conseguenza essenzialmente dei teoremi di Rademacher e Whitney, per le cui dimostrazioni consigliamo [9], [11] e [37].

Teorema A.2 (Rademacher) *Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana è differenziabile $\mathcal{L}^n$-quasi ovunque, dove $\mathcal{L}^n$ è la misura di Lebesque in $\mathbb{R}^n$. In* *particolare è ben definito q.o.*

$$\nabla f := \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big)$$

e vale $\mathcal{L}^n$-q.o.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla f \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Osservazione ∇f è limite q.o. di funzioni misurabili (i rapporti incrementali) ed è pertanto misurabile. Inoltre se f è Lipschitziana con costante di Lipschitz K, è chiaro che $|\nabla f| \le K$, per cui $\nabla f \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. •

Il seguente teorema verrà chiamato teorema di Whitney perché è una conseguenza abbastanza immediata di un celebre teorema di estensione di Whitney.

Teorema A.3 (Whitney) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che*

$$\mathcal{L}^n\big(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq h(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) \neq \nabla h(x)\}\big) < \varepsilon.$$

Il termine a destra dell'unione è ben definito a meno di insiemi di misura nulla grazie al teorema di Rademacher.

Proposizione A.4 (Caratterizzazione degli insiemi rettificabili) *Un sottoinsieme $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ è numerabilmente n-rettificabile se e solo se esiste una successione di applicazioni Lipschitziane $F_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ ed un insieme M_0 con $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ tali che*

$$M = M_0 \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n} F_j(A_j)\Big), \tag{A.2}$$

dove $A_j \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile per ogni j.

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Ogni sottovarietà N_j in $\mathbb{R}^{n+m}$ di classe C^1 è localmente immagine di applicazioni C^1 che indichiamo $h_{ij} : B^n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$. Allora

$$N_j \subset E_j \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_{ij}(B^n)\Big), \quad \mathcal{H}^n(E_j) = 0. \tag{A.3}$$

Se vale (A.1), scegliamo h_{ij} come detto in maniera che valga (A.3). Siano $A_{ij} := g_{ij}^{-1}(M)$ e $N_0 := \bigcup_{j=1}^n E_j$. Allora

$$M = N_0 \cup \Big(\bigcup_{i,j=1}^{n} h_{ij}(A_{ij})\Big).$$

Essendo A_{ij} Boreliano perché controimmagine di un Boreliano e non essendo restrittivo supporre che g_{ij} sia Lipschitziana (i.e. il suo gradiente sia limitato), abbiamo ottenuto (A.2).

($\Leftarrow$) Siano F_j come in (A.2). Per il teorema di Whitney è possibile trovare una famiglia $h_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ di applicazioni C^1 tali che

$$F_j(A_j) \subset E_j \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} h_{ij}(\mathbb{R}^n) \Big), \quad \forall j \geq 1. \tag{A.4}$$

Infatti è sufficiente scegliere h_{ij} come nell'enunciato del teorema di Whitney con $\varepsilon = \frac{1}{i}$. Se D_{ij} è l'insieme su cui h_{ij} o ∇h_{ij} non coincidono con F_j o con ∇F_j e se $D_j := \cap_i D_{ij}$ è chiaro che $\mathcal{L}^n(D) = 0$ e, dalla formula dell'area, $\mathcal{H}^n(F_j(D)) = 0$. Allora si pone $E_j := F(D_j)$ e vale (A.4).

Sia $C_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank} h_{ij}(x) < n\}$. Allora $\mathcal{H}^n(h_{ij}(C_{ij})) = 0$ per il lemma di Sard. Poniamo

$$N_0 := \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \Big) \cup \Big(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} C_{ij} \Big).$$

Allora $\mathcal{H}^n(N_0) = 0$ ed

$$M \subset N_0 \cup \Big(N_{ij} \Big),$$

con $N_{ij} := h_{ij}(\mathbb{R}^n \backslash C_{ij})$ unione numerabile di sottovarietà C^1 per il teorema del rango massimo (N_{ij} è una sottovarietà C^1 se h_{ij} è iniettiva, altrimenti si usa la locale iniettività di h_{ij} per scrivere N_{ij} come unione di sottovarietà C^1 e di un insieme di misura nulla). $\square$

Corollario A.5 *L'immagine di un'applicazione Lipschitziana*

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$$

è un insieme numerabilmente n-rettificabile. In particolare il grafico di una funzione Lipschitziana $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è n-rettificabile.

Poiché gli unici insiemi rettificabili Σ che utilizziamo sono i grafici di funzioni Lipschitziane, non è restrittivo supporre che $\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$ sia localmente finita, ovvero, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\mathcal{H}^n(\Sigma \cap K) < \infty$.

Definizione A.6 (Piano tangente) *Dato un insieme numerabilmente n-rettificabile Σ in $\mathbb{R}^{n+m}$ definiamo* piano tangente a Σ in p, *se esiste, l'unico sottospazio n-dimensionale P in $\mathbb{R}^{n+m}$ tale che*

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_{\eta_{p,\lambda}} f(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y), \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+m}),$$

Dove $\eta_{p,\lambda(y)} := \lambda^{-1}(y-p)$ per ogno $y \in \mathbb{R}^{n+m}$. Tale piano P verrà indicato $T_p\Sigma$.

Dato Σ n-rettificabile in $\mathbb{R}^{n+m}$, ad esempio una sottovarietà Lipschitziana, il suo piano tangente è ben definito $\mathcal{H}^n$-q.o. È chiaro che se Σ è di classe C^1, allora il piano tangente appena definito coincide con il piano tangente definito per sottovarietà regolari come insieme di vettori tangenti. Dato Σ rettificabile, grazie alla proposizione A.4, per $\mathcal{H}^n$-q.o. $p \in \Sigma$ esiste $N_{j(p)}$ sottovarietà C^1 tale che $p \in N_{j(p)}$. Si può mostrare che $T_pM = T_pN_{j(p)}$ per $\mathcal{H}^n$-q.o. $p \in \Sigma$; in particolare $T_pN_{j(p)}$ non dipende dalla scelta delle sottovarietà N_j che ricoprono Σ, né dalla scelta di $j(p)$.

Per questi motivi, dato $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e data $f \in \mathrm{Lip}(U)$, è ben definito $\mathcal{H}^n$-q.o. in $\Sigma \cap U$ il gradiente $\nabla^\Sigma f := \nabla^{N_j} f$. Quest'ultimo è ben definito $\mathcal{H}^n \llcorner N_j$-q.o. per il teorema di Rademacher.

A.2 Varifold rettificabili

Un n-varifold rettificabile è un insieme n-rettificabile Σ dotato di una molteplicità θ. L'importanza della molteplicità risiede nella necessità di definire un concetto di limite nello spazio dei varifold. Consideriamo il seguente esempio:

$$\Sigma_j := \{0\} \times (0,1) \cup \left\{\frac{1}{j}\right\} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Ciascun Σ_j è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^2$, ma l'unico limite ragionevole all'interno della categoria delle sottovarietà è $\Sigma := \{0\} \times (0,1)$. Se così fosse avremmo $\mathcal{A}(\Sigma_j) \to 2 > \mathcal{A}(\Sigma)$. Il limite tra i varifold invece è 2Σ e la sua *massa* è 2.

Definizione A.7 (Varifold rettificabile) *Un n-varifold rettificabile con supporto in Σ e molteplicità θ, $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, è la misura di Radon (misura Boreliana regolare finita sui compatti)*

$$V := \theta \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma,$$

ovvero

$$V(A) := \int_{A\cap\Sigma} \theta(y) d\mathcal{H}^n(y), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ Boreliano},$$

dove $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$ è n-rettificabile e θ è positiva e localmente integrabile su Σ.

Osservazione Equivalentemente si può pensare ad un varifold rettificabile come alla classe di equivalenza delle coppie (Σ, θ) con la relazione

$$(\Sigma_1, \theta_1) \sim (\Sigma_2, \theta_2) \text{ se } \mathcal{H}^n(\Sigma_1 \backslash \Sigma_2 \cup \Sigma_2 \backslash \Sigma_1) = 0 \text{ e } \theta_1 = \theta_2,\ \mathcal{H}^n - q.o. \quad \text{(A.5)}$$

Infatti è chiaro che se vale (A.5), allora $\mathbf{v}(\Sigma_1, \theta_1) = \mathbf{v}(\Sigma_2, \theta_2)$; viceversa se $V = \mathbf{v}(\Sigma_1, \theta_1) = \mathbf{v}(\Sigma_2, \theta_2)$ il supporto Σ di $V \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ soddisfa $\mathcal{H}^n(\Sigma \backslash \Sigma_i) = 0$ perché $\theta_i > 0$ su Σ_i. È, infine, ovvio che $\theta_1 = \theta_2$ $\mathcal{H}^n-$q.o.

In ogni caso noi penseremo ad un varifold rettificabile come ad una misura di Radon che possa essere espressa nella forma $\mathbf{v}(\Sigma, \theta)$. •

Osservazione Un sottoinsieme rettificabile $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$ sia localmente finita è un varifold rettificabile. •

Definizione A.8 (Piano tangente e massa) *Dato un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, il piano tangente di V in $p \in \Sigma$ è definito come*

$$T_pV := T_p\Sigma,$$

quest'ultimo definito come in A.6 La definizione è ben posta $\mathcal{H}^n$-q.o. e non dipende da Σ tranne che in un insieme $\mathcal{H}^n$ nullo.

La massa di V è la sua variazione totale nel senso delle misure e viene indicata con $\mathbf{M}(V)$. Chiaramente

$$\mathbf{M}(V) = V(\mathbb{R}^{n+m}) = \int_\Sigma \theta d\mathcal{H}^n.$$

La convergenza che definiamo sullo spazio dei varifold rettificabile, che è diversa dalla convergenza nel senso dei varifold che definiremo per varifold astratti, è la convergenza debole* indotta dalla dualità delle misure di Radon con lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto:

Definizione A.9 (Convergenza debole) *Diremo che una successione di varifold V_j converge debolmente a V (e scriveremo $V_j \rightharpoonup V$) se*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f dV_j = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f dV,$$

per ogni $f \in C^0_c(\mathbb{R}^{n+m})$.

Proposizione A.10 *La massa è continua rispetto alla convergenza debole in un compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$, i.e. se $V_j \rightharpoonup V$, $\operatorname{spt} V_j \subset K$ per ogni $j >\geq 0$ e $\operatorname{spt} V \subset K$, allora $\mathbf{M}(V_j) \to \mathbf{M}(V)$.*

Dimostrazione Sia $R > 0$ tale che $K \subset B_R(0)$ e $\varphi \in C^0_c(\mathbb{R}^{n+m})$ tale che $\varphi = 1$ su $B_R(0)$. Allora

$$\mathbf{M}(V_j) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi dV_j \to \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dV = \mathbf{M}(V).$$

□

A.2.1 Variazione prima di un varifold

Il concetto di variazione prima, definito per n-sottovarietà C^1 in $\mathbb{R}^{n+m}$ in 1.8, si estende facilmente ad un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$ grazie alla seguente definizione:

Definizione A.11 (Varifold immagine) *Dati $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ Lipschitziana e propria*[1] *ed un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, il varifold immagine di V tramite f è definito da*

$$f_\# V := \mathbf{v}(f(\Sigma), \widetilde{\theta}),$$

dove

$$\widetilde{\theta}(y) = \sum_{x \in \Sigma \cap f^{-1}(y)} \theta(x).$$

Grazie alla proposizione A.4, $f(\Sigma)$ è rettificabile e poiché f è propria si ha che $\widetilde{\theta}\mathcal{H}^n \llcorner f(\Sigma)$ è localmente finita: infatti dato un compatto K, della formula dell'area si ha che

$$f_\# V(K) = \int_{K \cap f(\Sigma)} \widetilde{\theta} d\mathcal{H}^n = \int_{f^{-1}(K) \cap \Sigma} Jf \theta d\mathcal{H}^n,$$

$Jf := \sqrt{\det(dF^* dF)}$. L'ultimo integrale è finito in quanto perché Jf è limitato, $f^{-1}(K)$ è compatto e $\theta\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$ è localmente finita.

Definizione A.12 (Variazione prima) *Sia $\varphi : \mathbb{R}^{n+m} \times (-1, 1)$ di classe C^2 tale che*

1. *esista un compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ per cui $\varphi_t(x) = x$ per ogni $x \notin K$;*
2. *$\varphi_0(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^{n+m}$.*

Allora la variazione prima di un varifold V rispetto a φ è la variazione prima della massa della famiglia di varifold $V_t := (\varphi_t)_\# V$, ovvero

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{M}(V_t).$$

Con la stessa dimostrazione della proposizione 1.10 abbiamo

Proposizione A.13 *Sia data una famiglia di diffeomorfismi φ_t come nella definizione A.12 ed un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$. Sia*

$$X(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t(x)$$

il campo variazione prima di φ. Allora

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{M}(V_t) = \int_\Sigma \operatorname{div} X dV = V(\operatorname{div} X). \tag{A.6}$$

[1] per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ anche $f^{-1}(K)$ è compatto.

Definizione A.14 (Varifold minimo) *Diremo che un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$ è minimo se la sua variazione prima è nulla per qualunque scelta di φ in A.12 o, equivalentemente, se per ogni campo vettoriale $X \in C_0^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^{n+m})$ vale*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X dV = 0. \tag{A.7}$$

Nel caso del varifold definito dal grafico di una funzione Lipschitziana $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, vogliamo una definizione di varifold minimo con bordo fissato. In generale non esiste una soddisfacente definizione di bordo di un varifold, ma nel caso di un grafico, chiameremo bordo di $\mathcal{G}_u$ il grafico $\mathcal{G}_{u|_{\partial\Omega}}$.

Definizione A.15 *Un varifold il cui supporto è il grafico di una funzione Lipschitziana $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, $V = \mathbf{v}(\mathcal{G}_u, \theta)$ si dice minimo se*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X dV = 0$$

per ogni campo vettoriale $X \in C_0^1(\Omega \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{n+m})$. Analogamente possiamo dire che V è minimo in $\Omega \times \mathbb{R}^m$.

Stiamo richiedendo che la massa di $V(\mathcal{G}_u, \theta)$ sia stazionaria solo rispetto a variazioni prime che lascino invariato il bordo.

La curvatura media generalizzata Per una sottovarietà Σ regolare e, quindi dotata di curvatura media, e per una variazione φ con campo variazione X, abbiamo visto che

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma H \cdot X d\mathcal{H}^n = \int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X d\mathcal{H}^n.$$

Una naturale generalizzazione del concetto di curvatura media ad un varifold può essere ricavata dall'ultima uguaglianza.

Definizione A.16 (Curvatura media generalizzata) *Dato un varifold $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, diremo che V ha curvatura media generalizzata H se*

$$\int_\Sigma H \cdot X dV = -\int_\Sigma \operatorname{div}^\Sigma X dV$$

per ogni campo $X \in C_0^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^{n+m})$.

Dunque un varifold è minimo se e solo se ha curvatura media generalizzata nulla.

A.2.2 La formula di monotonia

Proposizione A.17 *Sia dato un n-varifold rettificabile minimo ($H = 0$) $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$ in $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Allora, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$, la funzione definita da*

$$\rho \to \frac{V(B_\rho(x_0))}{\rho^n}, \quad 0 < \rho < d(x_0, U^c)$$

è monotona crescente.

Dimostrazione Fissato $\rho > 0$, definiamo una funzione $\gamma \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

1. $\dot\gamma(t) \leq 0$ per ogni $t \geq 0$;
2. $\gamma(t) = 1$ per ogni $t \leq \frac{\rho}{2}$;
3. $\gamma(t) = 0$ per ogni $t \geq \rho$.

Consideriamo il campo vettoriale

$$X(x) := \gamma(r)(x - x_0), \quad r := |x - x_0|.$$

Sia $x \in \Sigma$ tale che $T_x\Sigma$ esista; allora è ben definita la divergenza di X su Σ in x:

$$\operatorname{div}^\Sigma X(x) = \sum_{j=1}^{n+m} e_j \cdot (\nabla^\Sigma X^j) = \gamma(r) \sum_{j=1}^{n+m} e^{jj} + r\dot\gamma(r) \sum_{j,l=1}^{n+m} \frac{x^j - x_0^j}{r} \frac{x^l - x_0^l}{r} e^{jl}$$

in cui e^{jl} è la matrice $(n+m) \times (n+m)$ della proiezione di $\mathbb{R}^{n+m}$ su $T_x\Sigma$. La traccia della proiezione è $\sum e^{jj} = n$; inoltre

$$\sum_{j,l=1}^{n+m} \frac{x^j - x_0^j}{r} \frac{x^l - x_0^l}{r} e^{jl} = |(Dr)^T|^2 = 1 - |(Dr)^N|,$$

essendo uguale al prodotto scalare tra la proiezione di Dr su $T_x\Sigma$ e lo stesso $Dr = \frac{x - x_0}{r}$. In definitiva

$$\operatorname{div}^\Sigma X(x) = n\gamma(r) + r\dot\gamma(r)(1 - |(\nabla r)^N|^2).$$

Applichiamo (A.7) a X e otteniamo

$$n \int_\Sigma \gamma(r) dV + \int_\Sigma r\dot\gamma(r) dV = \int_\Sigma r\dot\gamma(r) |(\nabla r)^N|^2 dV. \tag{A.8}$$

Ora pensiamo di avere una famiglia di funzioni γ derivanti da un riscalamento di una stessa funzione $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ che soddisfi

1. $\dot\Phi(t) \leq 0$ per ogni $t \geq 0$;

2. $\Phi(t) = 1$ per ogni $t \leq \frac{1}{2}$;

3. $\Phi(t) = 0$ per ogni $t \geq 1$.

Più precisamente sia $\gamma(r) := \Phi\left(\frac{r}{\rho}\right)$ per $\rho > 0$ fissato. È chiaro che

$$r\dot{\gamma}(r) = \frac{r}{\rho}\dot{\Phi}\left(\frac{r}{\rho}\right) = -\rho\frac{d}{d\rho}\left(\Phi\left(\frac{r}{\rho}\right)\right).$$

Ne segue che, definendo

$$I(\rho) := \int_\Sigma \Phi\left(\frac{r}{\rho}\right) dV, \quad J(\rho) = \int_\Sigma \Phi\left(\frac{r}{\rho}\right) \left|(\nabla r)^N\right|^2 dV,$$

si ottiene

$$nI(\rho) - \rho\dot{I}(\rho) = -\dot{J}(\rho),$$

che può essere riscritta moltiplicando per ρ^{-n-1} come

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{I(\rho)}{\rho^n}\right) = \frac{\dot{J}(\rho)}{\rho^n}. \tag{A.9}$$

Per Φ che converge dal basso alla funzione caratteristica di $(-\infty, 1]$, otteniamo,

$$I(\rho) \to V(B_\rho(x_0)), \quad J(\rho) \to \int_{B_\rho(x_0)} \left|(Dr)^N\right|^2 dV,$$

per cui, nel senso delle distribuzioni, (A.9) diventa

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\mu_V(B_\rho(x_0))}{\rho^n}\right) = \frac{d}{d\rho}\int_{B_\rho(x_0)} \frac{\left|(Dr)^N\right|^2}{r^n} dV.$$

L'integrando a destra è positivo, da cui segue la monotonia del termine di sinistra. □

A.3 Varifold astratti

I varifold rettificabili sono misure di Radon in $\mathbb{R}^{n+m}$. Un teorema di compattezza per misure assicura che una successione di varifold con masse equilimitate ammette una sottosuccessione convergente nel senso delle misure. Il limite, tuttavia, è una misura di Radon il cui supporto è, in, generale non rettificabile. Siamo, quindi, motivati a definire una nozione di convergenza più forte e, in definitiva, una classe più ampia della classe dei varifold rettificabili.

Definizione A.18 *Dato un aperto $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, il suo fibrato Grassmanniano di n-piani è*

$$G_n(U) := U \times G(n,m), \quad \pi : G_n(U) \to U$$

dove $G(n,m) \cong \frac{O(n+m)}{O(n)\times O(n)}$ è la Grassmanniana degli n-piani in $\mathbb{R}^{n+m}$ e $\pi(x,S) = x$ per ogni $x \in U$ e S n-piano. Dotiamo $G_n(U)$ della topologia prodotto indotta da U e $G_n(m)$.

Definizione A.19 *Un n-varifold in $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ è una misura di Radon V sul fibrato Grassmanniano $G_n(U)$. Associata a V c'è una misura μ_V su U definita da*

$$\mu_V(A) := V(\pi^{-1}(A)), \quad \forall A \subset U.$$

Infine definiamo la massa di V,

$$\mathbf{M}(V) := \mu_V(U).$$

Osservazione Ad un n-varifold rettificabile $\mathbf{v}(\Sigma,\theta)$ corrisponde sempre un varifold astratto definito V definito da

$$V(A) = \mathbf{v}(\Sigma,\theta)(\pi(A \cap T\Sigma)),$$

essendo $T\Sigma := \{(x, T_x\Sigma) : x \in \Sigma_*\}$ il fibrato tangente di Σ (Σ_* sono i punti di Σ in cui il tangente approssimato è ben definito). Chiaramente $\mu_V = \mathbf{v}(\Sigma,\theta)$ in quanto

$$\mu_V(A) = V(\pi^{-1}(A)) = \mathbf{v}(\Sigma,\theta)(\pi(\pi^{-1}(A) \cap T\Sigma)) = \mathbf{v}(\Sigma,\theta)(A \cap \Sigma).$$

•

Diamo allo spazio dei varifold n-dimensionali in U la topologia debole* delle misure di Radon per cui $V_n \to V$ se e solo se per ogni $f \in C_c^1(G_n(U))$ vale

$$\int_{G_n(U)} f(x,S)dV_n(x,S) \to \int_{G_n(U)} f(x,S)dV(x,S).$$

Osservazione La convergenza dei varifold è più forte della convergenza debole definita per i varifold rettificabili. Richiedere che una successione di varifold rettificabili converga nel senso dei varifold (cioè come misura sulla Grassmanniana e non solo su U) vuol dire richiedere che, in un certo senso, sia il supporto che i piani tangenti dei varifold convergano. •

A.3.1 Varifold immagine e variazione prima

Definizione A.20 *Data un'applicazione Lipschitziana $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to U$ e dato un n-varifold V, il varifold immagine di V tramite φ è definito da*

$$\varphi_{\#}V(A) := \int_{F^{-1}(A)} J\varphi(x,S)dV(x,S), \tag{A.10}$$

dove $F : G_n(U) \to G_n(U)$ è data da

$$F(x,S) := (\varphi(x), d\varphi_x S)$$

mentre

$$J\varphi(x,S) := \sqrt{\det\left((d\varphi_x\big|_S)^* d\varphi_x\big|_S\right)}.$$

Osservazione Il varifold immagine $\varphi_{\#}V$ può esser definito mediante la dualità con le funzioni continue su $G_n(U)$:

$$\varphi_{\#}V(f) = \int_{G_n(U)} f d\varphi_{\#}V = \int_{G_n(U)} f(\varphi(x), d\varphi_x S)J\varphi(x,S)dV(x,S). \tag{A.11}$$

Si può passare da (A.10) ad (A.11) tramite le funzioni caratteristiche di sottoinsiemi $A \subset G_n(U)$ e attraverso un processo di approssimazione. •

Si può definire la variazione prima di un varifold astratto in maniera molto simile al caso dei varifold rettificabili: sia φ_t come nella definizione A.12. Allora la variazione prima di una varifold V rispetto a φ_t è

$$\delta V(X) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{M}(\varphi_{t\#}V), \tag{A.12}$$

con $X(x) := \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t}(x,0)$.

Con gli stessi calcoli delle proposizioni 1.9 e successive si dimostra che

$$\delta V(X) = \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X(x) dV(x,S),$$

essendo

$$\operatorname{div}_S X(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle \tau_i, \nabla_{\tau_i} X\rangle,$$

per una scelta di una base ortonormale $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ di S.

Definizione A.21 *Dato un varifold V in $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, la sua variazione prima (non rispetto ad un campo vettoriale) in $W \subset U$ è*

$$\|\delta V\| := \sup_{\substack{X \in C^1_c(U;\mathbb{R}^{n+m}) \\ |X| \le 1, \operatorname{spt} X \subset W}} |\delta V(X)|, \tag{A.13}$$

dove $|\delta V(X)|$ è definito in (A.12).

Osservazione Se V è il varifold astratto indotto da un varifold rettificabile $\mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, allora $\varphi_{\#}V$ è il varifold astratto corrispondente a $\varphi_{\#}\mathbf{v}(\Sigma, \theta)$ definito in A.11. Per questo motivo la variazione prima di un varifold rettificabile è uguale alla variazione prima del varifold astratto corrispondente. •

A.3.2 Il teorema di compattezza di Allard

Il teorema di compattezza di Allard fornisce la risposta alla domanda: quando una successione di varifold interi rettificabili ammette una sottosuccessione convergente nel senso dei varifold (cioé sulla Grassmanniana) ad un varifold *intero rettificabile*?

Esempio Consideriamo la successione di funzioni $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$u_n(x) = \frac{\{nx\}}{n},$$

dove $\{x\}$ indica x meno la sua parte intera.[2] Il grafico di u_n è un 1-varifold rettificabile intero in $\mathbb{R}^2$, e per $n \to +\infty$, il limite di $\mathbf{v}(G_{u_n}, 1)$ come varifold rettificabili interi è $\sqrt{2}\mathcal{H}^1 \llcorner([0,1] \times \{0\})$, il cui corrispondente varifold astratto è

$$\sqrt{2}\mathcal{H}^1 \llcorner([0,1] \times \{0\}) \times \delta_0,$$

identificando una retta in $\mathbb{R}^2$ con l'angolo che forma con l'asse delle ascisse. Tuttavia, il limite nel senso delle misure sulla Grassmanniana è:

$$\sqrt{2}\mathcal{H}^1 \llcorner([0,1] \times \{0\}) \times \delta_{\frac{\pi}{4}},$$

che non è rettificabile. •

Non è difficile provare che nell'esempio precedente $\|\delta\mathcal{G}_{u_n}\| \to +\infty$. D'altra parte, il teorema di compattezza di Allard dice che non potrebbe essere diversamente.

Teorema A.22 (Compattezza) *Sia data una successione V_j di varifold in U rettificabili interi le cui masse e variazioni prime, nel senso di A.21, siano localmente limitate, ovvero tali che per ogni $W \subset\subset U$*

$$\sup_{j \geq 1} \big(\mathbf{M}(V_j\big|_W) + \|\delta V_j\|(W)\big) < +\infty.$$

Sia anche U limitato. Allora esiste una sottosuccessione $V_{j'}$ convergente nel senso dei varifold ad un varifold rettificabile intero V e vale

$$\|\delta V\|(W) \leq \liminf_{j \to +\infty} \|\delta V_j\|, \quad \forall W \subset\subset U.$$

[2]ad esempio $\{\pi\} = 0,14159265\ldots$

Appendice B

I teoremi di regolarità di Allard

B.1 Regolarità all'interno

Il seguente teorema è di Allard, che lo pubblicò nel 1972 in [1]; esso riconduce lo studio della regolarità di un varifold minimo allo studio dei suoi coni tangenti e, di conseguenza, a teoremi di rigidità come il teorema di Bernstein, con l'obiettivo di dimostrare che la densità del varifold minimo è vicina a 1.

Definizione B.1 (Densità) *Dato un varifold rettificabile $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$, la sua densità in p, se esiste, è il seguente limite:*

$$\Theta^n(V, p) := \lim_{r \to 0} \frac{V(B_r(p))}{|B_r(p)|}. \tag{B.1}$$

Osservazione La densità di un varifold minimo è sempre ben definita perché, grazie alla formula di monotonia, la quantità $\frac{V(B_r(p))}{|B_r(p)|}$ è monotona ed ha, quindi, limite. •

Teorema B.2 *Sia $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $V = \mathbf{v}(\Sigma, \theta)$ un varifold minimo rettificabile. Esistono δ, γ e c dipendenti da m ed n tali che se*

$$\begin{cases} 0 \in \operatorname{spt} V, & B_\rho(0) \subset U \\ \theta \leq 1 & V - \text{q.o.}, \\ \dfrac{V(B_\rho(0))}{\omega_n \rho^n} \leq 1 + \delta, & \end{cases} \tag{B.2}$$

allora $\forall \alpha \in (0,1)$ esiste un'isometria lineare $q : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ e $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}^n_{\gamma\rho}(0))$ con $u(0) = 0$,

$$V \llcorner B_{\gamma\rho}(0) = \theta \mathcal{H}^n \llcorner \big(q(\mathcal{G}_u) \cap B_{\gamma\rho}(0)\big).$$

Inoltre

$$\frac{1}{\rho}\sup_{B_{\gamma\rho}(0)}|u| + \sup_{B_{\gamma\rho}(0)}|Du| + \rho[Du]_{\alpha,B_{\gamma\rho}(0)} \leq c\delta^{\frac{1}{4n}}. \tag{B.3}$$

Per una dimostrazione si può consultare, oltre all'articolo originale, il libro di Leon Simon [37].

B.2 Regolarità sul bordo

Anche questo teorema è sostanzialmente di W. Allard [2]. Per maggiori dettagli sulla dimostrazioni si veda [25], teorema 2.3.

Teorema B.3 *Sia u una soluzione del problema di Dirichlet per il sistema delle superfici minime* (1.24) *con dato al bordo $\psi \in C^{s,\alpha}(\overline{\Omega})$, $2 \leq s \leq +\infty$ e supponiamo che Ω sia* strettamente *convesso. Allora esiste un intorno V di $\partial\Omega$ tale che $u \in C^{s,\alpha}(V)$. Se ψ è analitica anche u in un intorno V di $\partial\Omega$.*

Bibliografia

[1] W. K. ALLARD *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. 95 (1972), 417-491.

[2] W. K. ALLARD *On the first variation of a varifold: boundary behaviour*, Ann. of Math. 101 (1975), 418-446.

[3] E. BOMBIERI, E. DE GIORGI, E. GIUSTI *Minimal cones and the Bernstein theorem*, Invent. Math. 7 (1969), 243-269.

[4] S. CAMPANATO *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 175-188.

[5] E. DE GIORGI *Sulla analiticità e la differenziabilità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Acc. Sci. Torino, Classe Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957), 25-43.

[6] E. DE GIORGI *Un'estensione del teorema di Bernstein*, Ann. Scuola Normale Superiore (1965), 79-85.

[7] J. DOUGLAS *Solution of the problem of Plateau*, Trans. A.M.S. 33 (1931), 263-321.

[8] J. DUGGAN *Regularity theorems for varifolds with mean curvature.* Ph.D. thesis, Australian National University, 1984.

[9] H. FEDERER *Geometric measure theory.* Springer-Verlag, 1969.

[10] M. GIAQUINTA *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems.* Ann. of Math. Studies 105. Princeton 1983.

[11] M. GIAQUINTA, G. MODICA, J. SOUČEK *Cartesian currents in the calculus of variations.* Springer, 1998.

[12] D. GILBARG, N. TRUDINGER *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[13] E. GIUSTI *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Dep of Math, Canberra.

[14] R. HARDT, C. P. LAU, F-H LIN, *Nonminimality of minimal graphs*, Indiana Univ. Math. J. 36 (1987) no 4, 843-848.

[15] R. HARVEY, H. B. LAWSON *Calibrated Geometries*, Acta math. 148 (1982), 47-157.

[16] S. HILDEBRANDT, J. JOST, K. O. WIDMAN *Harmonic mappings and minimal submanifolds*, Invent. Math. 62 (1980/81), n.ro 2, 269-298.

[17] W. Y. HSIANG *Remarks on closed minimal submanifolds in the standard Riemannian m-sphere*, J. Diff. Geom. 1 (1967), 257-267.

[18] G. HUISKEN: *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. 31 (1990), no.1, 285-299.

[19] T. ILMANEN *Singularities of mean curvature flow of surfaces*, preprint (1997) disponibile all'indirizzo
http://www.math.eth.ch/ilmanen/papers/pub.html

[20] H. JENKINS, J. SERRIN *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension,* J. Reine Angew. Math. 229 (1968), 170-187.

[21] J. JOST, Y. L. XIN *Bernstein type theorems for higher codimension*, Calc. Var. and Partial Differential Equations 9 (1999), n.ro 4, 227-296

[22] O. A. LADYŽHENSKAYA, N. N. URAL'TSEVA *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York and London 1968.

[23] O. A. LADYŽHENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'TSEVA *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, 1968.

[24] S. LANG *Real and functional analysis*, Graduate text in mathematics, Springer.

[25] H. B. LAWSON, R. OSSERMAN *Non-existence, non-uniqueness and irregularity of solutions to the minimal surface system.* Acta math. 139 (1977) 1-2, 1-17.

[26] J. M. LEE *Riemannian Manifolds, an introduction to curvature.* Springer 1997

[27] S. J. LEON *Linear algebra with applications*, 5^{th} ed. Prentice Hall, Inc. 1998.

[28] G. LIEBERMAN *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, Singapore 1996.

[29] C. B. MORREY *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*. Univ. California Publ. Math. 1 (1943), 1-130.

[30] C. B. MORREY *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, New York, 1966.

[31] M. MORSE, C. TOMPKINS *Existence of minimal surfaces of general critical type*, Ann. of Math. 40 (1939), 443-472.

[32] J. MOSER *On Harnack's theorem for elliptic differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 577-591.

[33] J. NASH *Continuity of solutions of parabolic and elliptic differential equations*, Amer. Journal of Math. 80 (1958), 931-953.

[34] R. OSSERMAN *Minimal varieties*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1092-1120.

[35] T. RADO *On Plateau's problem*, Ergebnisse der Mathematik und iher Grenzgebiete, vol. 2, Springer 1933.

[36] E. A. RUH, J. VILMS *The tension field of the Gauss map*, Trans. A.M.S. 149 (1970), 569-573.

[37] L. SIMON *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian Nat. Univ, 1983.

[38] J. SIMONS *Minimal varieties in Riemannian manifolds,* Ann. Math. 88 (1968), 62-105.

[39] MU-TAO WANG *The Dirichlet problem for the Minimal Surface System in higher codimension*, Comm. Pure. Appl. Math. 57 (2004) no.2, 267-281.

[40] MU-TAO WANG *Mean curvature flow of surfaces in Einstein four-manifolds* J. Differential Geom. 57 (2001), 301-338.

[41] MU-TAO WANG *Long-time existence and convergence of graphic mean curvature flow in arbitrary codimension*, Invent. Math. 148 (2002) 3, 525-543.

[42] MU-TAO WANG *On graphic Bernstein type results in higher codimension*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no1, 265-271.

[43] MU-TAO WANG *Gauss map of the mean curvature flow*, preprint, 2002.

[44] B. WHITE *A local regularity theorem for classical mean curvature flow*, preprint 2000.

[45] G. WILLIAMS *The Dirichlet problem for the minimal surface equation with small Lipschitz boundary data,* J. Reine Angew. Math. 354 (1984), 123-140

[46] Y-C WONG *Differential geometry of Grassmann manifolds,* Proc. N.A.S. 57 (1967), 589-594.